MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
ZÜRICH

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ O. PERRON W. SÜSS
W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. FEBRUAR 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1948

Math.
Z.

Preis RM 24.60

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere Exemplare können z. Zt. auch gegen Berechnung nicht geliefert werden.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Zürich, Kurvenstr. 8,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, z. Zt. Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut).

51. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Lorentz, Dr. G. G., Frankfurt/Main, Schumannstr. 58: Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind 85

Quade, Prof. Dr. W., Karlsruhe, Danzigerstr. 12: Schranken für die Eigenwerte der Sturmschen Randwertaufgabe zweiter Ordnung 92

Schwan, Dr. W., Osterwald über Elze/Hann.: Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden 126

Lorentz, Dr. G. G., Frankfurt/Main, Schumannstr. 58: Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen 135

Damköhler, Dr. W., Grünwald/München, Portenlängerstr. 25: Die absoluten Minimanten des regulären semidefiniten Variationsproblems . . 150

Hadwiger, Prof. Dr. H., Bern, Hochfeldstr. 31: Über die Zerstückung eines Eikörpers 161

Graf, Prof. Dr. H., Darmstadt, Regerweg 2 und Dr. H. Thomas †: Zur Frage des Gleichgewichtes von Viereckschnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. 2. Teil: Rückungsfadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur auf den Scherkschen Minimalflächen und auf den Wendelschraubenflächen 166

Seifert, Prof. Dr. H., Heidelberg, Hauptstr. 47—49: Periodische Bewegungen mechanischer Systeme 197

Kamke, Prof. Dr. E., Tübingen, Esslingerstr. 16 und Dr. G. G. Lorentz: Über das Dirichletsche Prinzip 217

Maaß, Dr. H., Heidelberg, Schillerstr. 37: Quadratische Formen über quadratischen Körpern 233

G. H. Hardy †

Am 1. Dezember letzten Jahres ist G. H. Hardy, Sadleirian Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge, der Hauptstätte seines Forschens und Wirkens, nach langer Krankheit sanft entschlafen. In ihm verliert die mathematische Wissenschaft einen Forscher von überragender Bedeutung, die Mathematische Zeitschrift ein hervorragendes Mitglied ihres wissenschaftlichen Beirats, dem er fast zwei Jahrzehnte angehört und ungeachtet aller Spannungen und Schranken dieser Zeit die Treue gehalten hat.

Das wissenschaftliche Lebenswerk von G. H. Hardy umfaßt die gesamte Analysis und ist dort von ungewöhnlicher Tiefe und großer Breite. Es ausführlich zu würdigen ist hier nicht der Ort. Seine besondere Liebe hat immer den unendlichen Reihen, besonders den divergenten gehört und bei diesen wiederum den von ihm so benannten Tauberian Theorems, deren Theorie er — seit 1911 fast stets gemeinsam mit I. E. Littlewood — bedeutend ausgebaut und vielseitig befruchtet hat. Ihr ist auch sein letztes, noch unter der Presse befindliches Buch gewidmet, dessen Korrekturen er bis zuletzt besorgt hat. Außer diesem seinem Hauptgebiet hat er den weiten Kreis angrenzender Gebiete durchforscht und so in der Theorie der Potenzreihen und der allgemeinen Funktionentheorie, der Theorie der Fourierschen und der Dirichletschen Reihen und über

diese hinaus in der gesamten analytischen Zahlentheorie. ganz besonders der Theorie der Riemannschen Zetafunktion, der Verteilung der Primzahlen, der partitio numerorum und anderer ihrer Teile, wie der Gitterpunkte und der diophantischen Approximationen außerordentlich Schönes und Bleibendes geleistet. Ein besonders reizvoller Teil seiner Arbeiten gilt den mannigfachen Ungleichungen, die in der Analysis auftreten, den Integralen gebrochener Ordnung und zahllosen schönen Einzelfragen der Integralrechnung. Wissenschaftlich und menschlich gleich schön und groß ist die Art, wie Hardy den indischen Mathematiker S. Ramanujan aufnahm und förderte, dessen an das Wunderbare grenzenden mathematischen Leistungen durch ihn der wissenschaftlichen Welt erschlossen worden sind.

Alle diese reichen Ergebnisse seines Lebens sind in zahllosen, vielfach mit kongenialen Mitarbeitern verfaßten Arbeiten und in mehreren zusammenfassenden Werken und Lehrbüchern niedergelegt, die in vorbildlicher Klarheit und Gründlichkeit die jeweils aufgeworfenen Fragen behandeln und von der Kraft und durchdringenden Schärfe und zugleich der überlegenen Weite seines Geistes ein imponierendes Bild geben. Einen stattlichen Teil seiner Arbeiten hat er der Mathematischen Zeitschrift zur Veröffentlichung übergeben, der er seit ihrer Gründung immer sein Interesse in Wort und Tat bezeugt hat. Sie ist stolz darauf, ihn zu den Ihren gezählt zu haben.

Wir werden das Andenken an diesen großen Gelehrten und bedeutenden Menschen stets bewahren und in Ehren halten.

Die Schriftleitung.

Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind.

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

Es wird sich hier um Limitierungsverfahren der Form

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} s_n, \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

handeln, die einer unendlichen Matrix

$$A = \|a_{mn}\|, \qquad m, n = 0, 1, \ldots$$

entsprechen; eine komplexe Zahlenfolge $\{s_n\}$ ist A-limitierbar zum Wert a, wenn alle Summen t_m einen Sinn haben und wenn $t_m \to a$ strebt für $m \to \infty$.

Bekanntlich ist das Verfahren (1) dann und nur dann konvergenztreu, d. h. es verwandelt eine konvergente Folge $\{s_n\}$ wiederum in eine konvergente Folge $\{t_m\}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1^0 $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \leqq M \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

(M von m unabhängig).

2^0 Es existiert für jedes n

$$\lim_{m \to \infty} a_{mn} = b_n \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

3^0 Es existiert

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = c.$$

Dann ist für jede konvergente Folge $\{s_n\}$ mit $\lim s_n = a$

$$\lim_{m \to \infty} t_m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s_n + (c - \sum_{n=0}^{\infty} b_n) a. \tag{2}$$

Für permanente Verfahren (für die aus $s_n \to a$ stets $t_m \to a$ folgen soll) lauten die entsprechenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen 1^0,

$2'$ $$\lim_{m \to \infty} a_{mn} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

und

$3'$ $$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = 1.$$

Der Kürze halber wollen wir die angeführten Bedingungen die Toeplitzschen Bedingungen nennen.

Ähnlich wie oben kann man das Verfahren A statt mit der gewöhnlichen Konvergenz, mit einem anderen Limitierungsverfahren B zu vergleichen suchen. Dabei heißt A *nicht schwächer* als B, wenn jede B-limitierbare Folge $\langle s_n \rangle$ auch A-limitierbar ist. Für den Fall der Cesàroschen Verfahren $B = C_\alpha\,(\alpha > 0)$ wurde dieser Vergleich durch S. Mazur [1]) durchgeführt. Wir wollen hier zeigen, daß man im Falle $0 < \alpha \leqq 1$ zu einfacheren notwendigen und hinreichenden Bedingungen gelangen kann (Satz III unten), als die von Mazur angegebenen. Als Hilfsmittel dienen dabei die Differenzen gebrochener Ordnung (5)[2]) sowie eine eigentümliche Verallgemeinerung der Abelschen Formel der partiellen Summation (Satz II und I), die nur für $\alpha \leqq 1$ gültig ist.

Das Cesàrosche Verfahren C_α der Ordnung $\alpha > 0$ wird wie folgt definiert:

Es sei

$$\sigma_n^\alpha = \frac{s_n^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k, \tag{3}$$

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{4}$$

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha$, falls es existiert, der Cesàrosche Limes $C_\alpha\text{-}\lim s_n$ der Folge $\langle s_n \rangle$. Die Zahlen A_n^α sind durch (4) für alle reellen α definiert, während die asymptotische Abschätzung nur für $\alpha \neq -1, -2, \dots$, gilt. Sie haben die folgenden Eigenschaften:

$$A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha A_k^\beta, \qquad A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k^\alpha| < +\infty \qquad (\alpha < -1).$$

Wir führen noch die Differenz α-ter Ordnung $\Delta^\alpha a_n$ einer Folge $\langle a_n \rangle$ ein (dabei braucht α nicht ganz zu sein):

$$\Delta^\alpha a_n = a_n - \frac{\alpha}{1} a_{n+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} a_{n+2} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-\alpha-1} a_{n+k}. \tag{5}$$

Diese Definition ist jedenfalls dann sinnvoll, wenn die Folge $\langle a_n \rangle$ beschränkt und $\alpha \geqq 0$, oder wenn $\sum |a_n| < +\infty$ und $\alpha \geqq -1$ ist, denn in diesen Fällen konvergiert die Reihe (5) absolut.

Folgende Tatsache ist bekannt: Damit die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n \tag{6}$$

---

[1]) S. Mazur, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 599—611, insbes. Satz X.

[2]) Sie wurden von S. Chapman, Proceed. of the London Math. Soc. (2) **9**, 369—409 eingeführt und von A. F. Andersen, Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Kopenhagen 1921, eingehend untersucht.

für *jede* konvergente Folge $\{s_n\}$ konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty . \tag{7}$$

Wir wollen eine Verallgemeinerung dafür geben.

I. *Damit die Reihe* (6) *für jede C_α-limitierbare Folge $\{s_n\}$ konvergent sei, ist notwendig und hinreichend*[3]*, daß die Reihe $\sum a_n$ konvergiert und daß es eine Zahl M gibt, für welche*

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \left| A_0^{-\alpha-1} a_k + A_1^{-\alpha-1} a_{k+1} + \cdots + A_{n-k}^{-\alpha-1} a_n \right| \leqq M, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{8}$$

gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^\alpha |\Delta^\alpha a_k| < +\infty , \tag{9}$$

und für jede C_α-limitierbare $\{s_n\}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^\alpha \Delta^\alpha a_k . \tag{10}$$

Wir haben:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_k s_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{l=0}^{k} A_{k-l}^{-\alpha-1} s_l^\alpha$$

$$= \sum_{l=0}^{n} s_l^\alpha \sum_{k=l}^{n} A_{k-l}^{-\alpha-1} a_k = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^\alpha A_k^\alpha \sum_{l=k}^{n} A_{l-k}^{-\alpha-1} a_l .$$

Damit t_n für jede konvergente Folge $\{\sigma_k^\alpha\}$, also jede C_α-limitierbare $\{s_k\}$, einem endlichen Grenzwert zustrebt, ist notwendig und hinreichend, daß unsere Bedingungen erfüllt sind. In der Tat, (8) ist die Toeplitzsche Bedingung 1^0; die beiden anderen Bedingungen sind automatisch erfüllt:

$$\lim_{n\to\infty} A_k^\alpha \sum_{l=k}^{n} A_{l-k}^{-\alpha-1} a_l = A_k^\alpha \Delta^\alpha a_k = b_k$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \sum_{l=k}^{n} A_{l-k}^{-\alpha-1} a_l = \sum_{k=0}^{n} a_k \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

für $n \to \infty$. Es existiert also der Grenzwert von t_n und ist nach (2) gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sigma_k^\alpha + \lambda \lim_{k\to\infty} \sigma_k^\alpha , \tag{11}$$

wo λ eine gewisse Konstante ist. Dabei konvergiert die Reihe $\sum b_k$ absolut, was (9) liefert. Um die Zahl λ zu bestimmen, setzen wir $s_k = 0$ $(k \leqq n)$, $s_k = 1$ $(k > n)$; dann wird $\sigma_k^\alpha = 0$ $(k \leqq n)$, $0 < \sigma_k^\alpha < 1$ $(k > n)$, $\lim \sigma_k^\alpha = 1$. Wenn wir außerdem n so groß wählen, daß

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon , \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| < \varepsilon$$

[3]) Vgl. auch S. Mazur, a. a. O., S. 608.

wird, so folgt aus (11) $|\lambda| < 2\varepsilon$. Es ist also $\lambda = 0$ und (11) ist die gewünschte Formel (10).

Für $0 < \alpha \leqq 1$ läßt sich der bewiesene Satz bedeutend vereinfachen. Die Bedingung (8) läßt sich durch (9) ersetzen, so daß wir ein vollständiges Analogon zu der Bedingung (7) erhalten.

II. *Für $0 < \alpha \leqq 1$ ist zur Konvergenz der Reihe* (6) *für jede C_α-limitierbare Folge $\{s_n\}$ notwendig und hinreichend, daß $\sum a_n$ konvergiert und daß*

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \, |\Delta^\alpha a_n| < +\infty \tag{9}$$

ist[4]).

Es genügt, aus (9) die Beschränktheit von

$$\varrho_n = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \, |A_0^{-\alpha-1} a_k + \cdots + A_{n-k}^{-\alpha-1} a_n|$$

abzuleiten. Wir beweisen zunächst die Identität

$$a_0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} \Delta^\alpha a_k ,$$

aus welcher durch Einsetzen von a_{n+k} statt a_k

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} \Delta^\alpha a_{n+k} \tag{12}$$

folgt. In der Tat die Doppelreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\infty} |A_l^{-\alpha-1}| \, |a_{k+l}|$$

konvergiert. Sie ist nämlich gleich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \sum_{k=0}^{\nu} A_k^{\alpha-1} \, |A_{\nu-k}^{-\alpha-1}| .$$

Nun ist

$$\sum_{k=0}^{\nu} A_k^{\alpha-1} \, |A_{\nu-k}^{-\alpha-1}| \leqq A_0^{\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu^{-\alpha-1}| ,$$

also gleichmäßig beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz der Doppelreihe. Es ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha-1} \Delta^\alpha a_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \sum_{k=0}^{\nu} A_k^{\alpha-1} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu A_\nu^{-1} = a_0 .$$

---

[4]) Eine verwandte Frage haben HARDY, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **6** (1908), S. 255—264 und BOHR, Compt. Rend. **148** (1909), S. 75 untersucht. Es handelt sich dort um die Frage, wann $\sum_0^\infty c_n u_n$ C_α-summierbar ist für jede C_α-summierbare Reihe $\sum_0^\infty u_n$. In abschließender Form ist das Problem bei L. S. BOSANQUET, Note on the BOHR-HARDY Theorem, J. London Math. Soc. **17** (1942), S. 166—173, behandelt.

Mit Hilfe von (12) werden wir ϱ_n durch die Differenzen $\Delta^\alpha a_k$ ausdrücken. Wir bekommen

$$\varrho_n = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \left| \sum_{l=0}^{n-k} A_l^{-\alpha-1} a_{k+l} \right| = \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha \left| \sum_{l=0}^{n-k} A_l^{-\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^{\alpha-1} \Delta^\alpha a_{k+l+\nu} \right|.$$

Der Ausdruck unter dem Betragzeichen ist gleich

$$\sum_{p=0}^{n-k} \Delta^\alpha a_{k+p} \sum_{\nu=0}^{p} A_\nu^{-\alpha-1} A_{p-\nu}^{\alpha-1} + \sum_{p=1}^{\infty} \Delta^\alpha a_{n+p} \sum_{\nu=0}^{n-k} A_\nu^{-\alpha-1} A_{n-k+p-\nu}^{\alpha-1}.$$

Die erste Summe ist $\Delta^\alpha a_k$. Weiter haben wir, da $n+p-k \geqq 1$ ist,

$$\sum_{\nu=0}^{n+p-k} A_\nu^{-\alpha-1} A_{n+p-k-\nu}^{\alpha-1} = A_{n+p-k}^{-1} = 0.$$

Es ist also

$$(13) \qquad \varrho_n \leqq \sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha |\Delta^\alpha a_k| + \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha \left| \sum_{p=1}^{\infty} \Delta^\alpha a_{n+p} \sum_{\nu=k+1}^{k+p} A_\nu^{-\alpha-1} A_{k+p-\nu}^{\alpha-1} \right|$$

$$\leqq M + \sum_{p=1}^{\infty} |\Delta^\alpha a_{n+p}| \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha \sum_{\nu=k+1}^{k+p} |A_\nu^{-\alpha-1}| A_{k+p-\nu}^{\alpha-1}.$$

Der Koeffizient von $|\Delta^\alpha a_{n+p}|$ ist gleich

$$(14) \qquad \sum_{\nu=1}^{p} A_{p-\nu}^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha |A_{k+\nu}^{-\alpha-1}|.$$

Hier ist

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha |A_{k+\nu}^{-\alpha-1}| \leqq A_n^\alpha C_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\nu+k)^{1+\alpha}} \leqq C_2 A_n^\alpha \frac{1}{\nu^\alpha} \leqq C_3 A_n^\alpha A_\nu^{-\alpha}$$

(C_1, C_2, C_3 sind Konstanten). Infolgedessen ist der Ausdruck (14) nicht größer als

$$C_3 \sum_{\nu=0}^{p} A_n^\alpha A_{p-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^{-\alpha} = C_3 A_n^\alpha.$$

(13) liefert jetzt

$$\varrho_n \leqq M + C_3 \sum_{p=1}^{\infty} A_n^\alpha |\Delta^\alpha a_{n+p}|$$

$$\leqq M + C_3 \sum_{p=0}^{\infty} A_{n+p}^\alpha |\Delta^\alpha a_{n+p}| \leqq M(1+C_3),$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Bemerkung. Wir zeigen noch, daß die Bedingung $0 < \alpha \leqq 1$ sehr wesentlich ist. In der Tat, sei $\alpha > 1$ und α_0 eine natürliche Zahl derart, daß $\alpha_0 - 1 < \alpha \leqq \alpha_0$ ist. Wir setzen $a_n = A_n^{-p}$, $\alpha_0 - 1 < p < \alpha$. Dann haben wir

$$\Delta^{\alpha_0} a_n = \Delta^{\alpha_0} A_n^{-p} = \pm A_{n+\alpha_0}^{-p-\alpha_0} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha_0+p}}\right),$$

und

$$\Delta^\alpha a_n = \Delta^{\alpha-\alpha_0}\Delta^{\alpha_0} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{-(\alpha-\alpha_0+1)} \Delta^{\alpha_0} a_{n+k}\ ^{5}),$$

also

$$\Delta^\alpha a_n = O\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-(\alpha_0-1)}} \frac{1}{(n+k)^{\alpha_0+p}}\right) = O\left(\sum_{k=0}^{n} + \sum_{n+1}^{\infty}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\alpha_0+p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-(\alpha_0-1)}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+p+1}}\right) = O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha+p}}\right)$$

und $\sum A_n^\alpha |\Delta^\alpha a_n| < +\infty$, während $\varrho_n \geqq A_n^\alpha |a_n| \to \infty$.

Mit Hilfe des Satzes II und der Transformation (10) können wir leicht den folgenden Satz beweisen:

III. *Damit jede C_α-limitierbare $(0 < \alpha \leqq 1)$ Folge $\{s_n\}$ auch mit Hilfe eines konvergenztreuen Verfahrens A limitierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine von m unabhängige Zahl M gibt, für die*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^\alpha |\Delta^\alpha a_{mk}| \leqq M. \tag{15}$$

Ist diese Bedingung erfüllt und das Verfahren A permanent, so fallen für solche Folgen $\{s_n\}$ C_α-lim s_n und A-lim s_n zusammen[6]).

Es sei

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} s_n, \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Damit t_m für jede C_α-limitierbare Folge $\{s_n\}$ einen Sinn hat, ist nach Satz II die Bedingung $\sum A_k^\alpha |\Delta^\alpha a_{mk}| < +\infty$ notwendig und hinreichend. Ist sie erfüllt, so haben wir

$$t_m = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^\alpha a_{mn} s_n^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha \Delta^\alpha a_{mn} \sigma_n^\alpha. \tag{16}$$

Jetzt genügt es, die Toeplitzschen Bedingungen für diese Transformation der Folge $\{\sigma_n^\alpha\}$ anzugeben. Aber 1^0 ist nichts anderes als (15), und 2^0 und 3^0 folgen daraus automatisch. In der Tat

$$\lim_{m\to\infty} A_n^\alpha \Delta^\alpha a_{mn} = \lim_{m\to\infty} A_n^\alpha \left(a_{mn} - \frac{\alpha}{1} a_{m,n+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} a_{m,n+2} - \cdots\right)$$

$$= A_n^\alpha \Delta^\alpha b_n$$

für $n = 0, 1, \ldots$, da die Reihe in den Klammern gleichmäßig in m

---

[5]) Andersen, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **27** (1928), S. 39—71. Vgl. auch Bosanquet, a. a. O. [4]).

[6]) Für $\alpha = 1$ wurde dieser Satz von W. Orlicz, Tohôku Math. Journ. **26** (1926), S. 233—237 bewiesen. Wie aus der Bemerkung zu Satz II folgt, ist die Einschränkung $\alpha \leqq 1$ durchaus wesentlich. Will man den Satz auch auf den Fall $\alpha > 1$ ausdehnen, so ist noch für jede Zeile der Matrix A die Bedingung (8) hinzu zu nehmen. Vgl. Mazur, a. a. O.

konvergiert. Und ferner, wenn wir in (10) $s_n = 1$ setzen,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} \Delta^{\alpha} a_{mn} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} = c.$$

Ist A permanent, so zeigt dieselbe Überlegung, daß für die durch (16) gegebene Transformation sogar 2′ und 3′ erfüllt sind. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Aus diesem Beweis und Satz I folgt auch ohne weiteres: Ist das Verfahren A zeilenfinit (d. h. nur endlich viele Glieder jeder Zeile sind von Null verschieden), so ist die Bedingung (15) auch für $\alpha > 1$ notwendig und hinreichend.

(Eingegangen am 12. Oktober 1943.)

Schranken für die Eigenwerte der Sturmschen Randwertaufgabe zweiter Ordnung.

Von

W. Quade in Karlsruhe.

Die Mehrzahl der klassischen und auch der neueren Methoden zur genäherten Berechnung der Eigenwerte [1]*) operiert bei der Sturmschen Randwertaufgabe entweder mit der in der Randwertaufgabe enthaltenen linearen Differentialgleichung (DGl.) zweiter Ordnung oder mit einem geeigneten Variationsproblem oder der entsprechenden Integralgleichung. Von der Möglichkeit, die DGl. zweiter Ordnung auf eine solche erster Ordnung zurückzuführen, um aus der letzteren Aussagen über die Eigenwerte zu gewinnen, ist weniger Gebrauch gemacht worden [2]). Bei dieser Zurückführung hat man es entweder mit einer Riccatischen DGl. oder der von H. Prüfer [3]) angegebenen zu tun. Wie in dieser Arbeit gezeigt werden soll, bietet sich in der näherungsweisen Integration der Prüferschen DGl., gelegentlich auch der Riccatischen DGl., ein zur Untersuchung der Sturmschen Randwertaufgabe leicht gangbarer, zu neuen Verfahren der Eigenwertbestimmung führender Weg dar, besonders, wenn man zur Behandlung der Prüferschen DGl. die Methode der Ober- und Unterfunktionen [4]) heranzieht und sich dabei um Abschätzungen bemüht, die schärfer sind als die zur Führung eines Existenzbeweises erforderlichen. Vor allem lassen sich aus diesem Gedanken heraus allgemeine Verfahren entwickeln, die gestatten, gleich-

[1]) Eine Zusammenstellung der neueren Methoden bei L. Collatz, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **19** (1939), S. 224 u. 297, wo auch ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis gegeben wird; vgl. auch E. Kamke, Differentialgleichungen I, Leipzig 1942, Abschnitt B, S. 182, insbes. S. 258 und die dort angegebene Literatur.

*) Es sei noch auf die während der Drucklegung dieser Arbeit erschienene zusammenfassende Darstellung von L. Collatz, Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945 hingewiesen. Die dort in Fußnote [2]) auf S. 137 zitierte Arbeit ist die vorliegende.

[2]) Vgl. z. B. E. Kamke, Math. Zeitschr. **44** (1939), S. 635, wo unter Benutzung der Prüferschen Differentialgleichung Oszillationssätze für die lineare selbstadjungierte Randwertaufgabe zweiter Ordnung bewiesen werden.

[3]) H. Prüfer, Math. Annalen **95** (1926), S. 499, wiedergegeben bei E. Kamke Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 277.

[4]) Vgl. O. Perron, Math. Annalen **76** (1915), S. 471; M. Müller, Jahresber. DMV. **37** (1928), S. 41 sowie W. Quade, Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 234 (im Text mit [Q] bezeichnet).

zeitig obere und untere Schranken *aller* Eigenwerte anzugeben. Die hierbei erhaltenen Ergebnisse dürften auch bei der praktischen Berechnung der Eigenwerte gute Dienste leisten.

§ 1.

Vorbereitende Bemerkungen.

Die STURMsche Randwertaufgabe zweiter Ordnung lautet:

(S)

$$p_0(x)\,y'' + p(x)\,y' + q(x,\lambda)\,y = 0, \qquad a \leqq x \leqq b,\ b > a, \tag{1.1}$$

$$\alpha\,y(a) + \alpha'\,y'(a) = 0, \qquad \alpha^2 + \alpha'^2 > 0, \tag{1.2}$$

$$\beta\,y(b) + \beta'\,y'(b) = 0, \qquad \beta^2 + \beta'^2 > 0.$$

Hierin sind die α und β von λ unabhängige Konstanten. Es wird nach denjenigen im Grundintervall $\langle a, b\rangle$ existierenden Lösungen der DGl. (1.1) gefragt, welche die Randbedingungen (1.2) erfüllen und $\not\equiv 0$ sind. Solche Lösungen existieren nur für geeignete Werte des in der DGl. auftretenden Parameters λ, die sogenannten *Eigenwerte*; die zu den Eigenwerten gehörigen Lösungen von (1.1) sind die *Eigenfunktionen.*

Sind $p_0(x)$ und $p(x)$ im Grundintervall stetig, sowie $q(x,\lambda)$ für jedes feste λ und ist dort $p_0(x) > 0$, dann läßt sich jede Randwertaufgabe (S) *auf eine Randwertaufgabe* (S′) *mit der einfacheren DGl.*

$$y'' + Q(x,\lambda)\,y = 0 \tag{1.3}$$

zurückführen, in welcher $Q(x,\lambda)$ eine bei festem λ in ihrem Definitionsintervall stetige Funktion ist.

In der Tat, da $p_0 > 0$ ist, kann man (1.1) durch p_0 dividieren, und es bleibt eine DGl. mit $p_0 = 1$. Multipliziert man diese mit dem positiven Faktor

$$f(x) = e^{\int p(x)\,dx},$$

so erhält man zunächst die *selbstadjungierte* DGl.

$$(f\,y')' + f(x)\,q(x,\lambda)\,y \equiv (f\,y')' + g(x,\lambda)\,y = 0.$$

Führt man nunmehr

$$t = \int_a^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

als neue unabhängige Veränderliche ein, wobei wegen $f > 0$ ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen t und x besteht und somit das Grundintervall umkehrbar eindeutig auf ein Intervall $\langle 0, T\rangle$ abgebildet wird, so erhält man die DGl.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f[x(t)]\,g[x(t),\lambda]\,y \equiv \frac{d^2y}{dt^2} + Q(t,\lambda)\,y = 0.$$

Die Randbedingungen (1.2) gehen dabei über in

$$\alpha f(a) y(0) + \alpha' \dot{y}(0) = 0,$$
$$\beta f(b) y(T) + \beta' \dot{y}(T) = 0.$$

Aus den bei den einzelnen Schritten benutzten Umformungen folgt auf Grund der Voraussetzungen, daß $Q(t, \lambda)$ für jedes feste λ eine im Intervall $\langle 0, T \rangle$ stetige Funktion ist.

Es gibt noch *ein anderes Verfahren*, die DGl. (1.1) in die einfachere Form (1.3) überzuführen. *Bei diesem muß man die zusätzliche Voraussetzung machen, daß in der DGl.* (1.1) *mit* $p_0 = 1$ *die Funktion* $p(x)$ *eine im Grundintervall stetige Ableitung besitzt.*

Setzt man $y = u(x) v(x)$ in die DGl. (1.1) mit $p_0 = 1$ ein, so kommt

$$u v'' + (2u' + pu) v + (qu + pu' + u'') v = 0.$$

Wählt man u so, daß der bei v' stehende Faktor verschwindet, also

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx},$$

dann folgt nach Division durch die positive Funktion u

$$v'' + [q(x, \lambda) - \tfrac{1}{4} p^2(x) - \tfrac{1}{2} p'(x)]\, v = 0,$$

womit (1.1) in die Form (1.3) übergeführt ist. Der bei v stehende Faktor ist eine für jedes feste λ im Grundintervall stetige Funktion. Die Randbedingungen für $v(x)$ lauten

$$[\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha' p(a)] v(a) + \alpha' v'(a) = 0,$$
$$[\beta - \tfrac{1}{2}\beta' p(b)] v(b) + \beta' v'(b) = 0.$$

Nach dem eben Dargelegten bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn den folgenden Untersuchungen an Stelle der eingangs formulierten Sturmschen Randwertaufgabe (S) immer nur die Sturmsche Randwertaufgabe in der vereinfachten Form

$$\text{(S')} \qquad \begin{aligned} y'' + Q(x, \lambda) y &= 0, && a \leqq x \leqq b,\ b > a, \\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) &= 0, && \alpha^2 + \alpha'^2 > 0, \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) &= 0, && \beta^2 + \beta'^2 > 0 \end{aligned}$$

zugrunde gelegt wird.

Ausgangspunkt der im folgenden beschriebenen Verfahren zur Lösung der Sturmschen Randwertaufgabe ist die in Fußnote [3]) zitierte Arbeit von H. Prüfer, in welcher die Randwertaufgabe zweiter Ordnung auf eine solche erster Ordnung zurückgeführt wird. Es möge daher kurz an die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit erinnert werden.

Um die DGl. (1.3) zu lösen, führt Prüfer „Polarkoordinaten" ein,

$$y = Y \sin u, \qquad y' = Y \cos u,$$

und erhält so für die Funktionen $u(x)$ und $Y(x)$ das folgende System,

welches der DGl. (1.3) äquivalent ist:

$$u' = \cos^2 u + Q(x,\lambda)\sin^2 u, \tag{1.4}$$

$$Y' = Y \sin u \cos u\,[1 - Q(x,\lambda)]. \tag{1.5}$$

In diesem kann man bei nicht identisch verschwindender Lösung von (1.3) immer $Y > 0$ voraussetzen. Kennt man die Lösung $u(x,\lambda)$ von (1.4), so folgt aus (1.5)

$$Y(x,\lambda) = C \exp \tfrac{1}{2} \int_a^x [1 - Q(\xi,\lambda)] \sin 2u(\xi,\lambda)\, d\xi.$$

Damit ist die Auflösung der DGl. zweiter Ordnung (1.3) auf die einer DGl. erster Ordnung mit nachfolgender Quadratur zurückgeführt und die Sturmsche Randwertaufgabe (S′) auf die folgende:

$$(\Sigma) \qquad \begin{aligned} u' &= \cos^2 u + Q(x,\lambda)\sin^2 u, \\ u(a,\lambda) &= u_a, \quad u(b,\lambda) = u_b + n\pi \qquad (n \text{ ganze Zahl}), \end{aligned}$$

wobei die Werte von u_a und u_b den aus den Randbedingungen von (S′) folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha \sin u_a + \alpha' \cos u_a &= 0, & 0 \leqq u_a < \pi, \\ \beta \sin u_b + \beta' \cos u_b &= 0, & 0 < u_b \leqq \pi \end{aligned}$$

zu entnehmen sind. Jede Lösung der Randwertaufgabe (Σ) ist gleichzeitig eine Lösung der Randwertaufgabe (S′) und umgekehrt.

Soll die Lösung $u(x,\lambda)$ der DGl. (1.4) außer der ersten Randbedingung von (Σ) auch noch die zweite erfüllen, so muß der Parameter eine Wurzel der *λ-Gleichung*.

$$u(b,\lambda) = u_b + n\pi \tag{1.5}$$

sein, wobei n eine ganze Zahl ist. Von der letzten Bedingung läßt sich zeigen, daß sie wegen $0 < u_b \leqq \pi$ nur für nichtnegative ganze Zahlen erfüllbar ist; Eigenwerte und Eigenfunktionen können somit höchstens für nichtnegative ganze Zahlen n existieren.

Ist λ_n eine Wurzel der λ-Gleichung (1.5), also ein Eigenwert, so besitzt die zu diesem gehörige Lösung der DGl. (1.3), also die Eigenfunktion $y(x,\lambda_n)$ im offenen Grundintervall genau n Nullstellen.

§ 2.

Der Oszillationssatz.

Besonders einfach gestaltet sich die Behandlung der Randwertaufgabe, wenn $u(b,\lambda)$ eine stetige, mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion ist. Gibt es dann zu einem festen nichtnegativen ganzzahligen n eine Wurzel der λ-Gleichung (1.5), dann gibt es nur *eine* solche Wurzel und die λ_n nehmen mit wachsendem n monoton zu. Welche Bedingungen $Q(x,\lambda)$ erfüllen muß, damit dieser Fall ein-

tritt, darüber geben die beiden folgenden Hilfssätze [5]) Auskunft, die der Vorbereitung des Oszillationssatzes dienen.

Hilfssatz 1. *Die Funktion $f(x, u, \lambda)$ sei in dem Gebiet G: $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < u < \infty$, $-\infty < \lambda < \infty$ stetig. Außerdem sei der Betrag des Differenzenquotienten*

$$\Delta = \frac{f(x, U, \lambda) - f(x, u, \lambda)}{U - u}$$

für jedes feste λ gleichmäßig beschränkt, $|\Delta| \leqq K(\lambda)$. Dann besitzt die DGl.

$$u' = f(x, u, \lambda)$$

eine und nur eine Lösung $u(x, \lambda)$, die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annimmt, und $u(x, \lambda)$ ist eine für jedes feste λ im Grundintervall stetige und mit stetiger Ableitung versehene Funktion von x. Im Grundintervall geht gleichmäßig $u(x, \Delta) \to u(x, \lambda)$, wenn $\Delta \to \lambda$, und es ist daher $u(b, \lambda)$ eine stetige Funktion des Parameters λ.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf, da die rechte Seite der DGl. nach Voraussetzung in G einer Lipschitz-Bedingung genügt. Zum Beweis des zweiten Teils sei angenommen, daß Δ ein von λ verschiedener Wert ist. $U(x)$ und $u(x)$ seien die Lösungen der DGln.

$$u' = f(x, u, \Delta), \quad u' = f(x, u, \lambda),$$

wobei $U(a) = u(a) = u_a$. Nimmt man $u(x)$ als Ausgangsfunktion im Picardschen Verfahren der schrittweisen Näherungen, dann ist nach [Q], S. 327—329:

$$|U(x) - u(x)| \leqq \int_a^x e^{L(x-t)} |f(t, u, \lambda) - f(t, u, \Delta)| \, dt,$$

wobei L die obere Grenze von $K(\lambda)$ im Intervall $\langle \lambda, \Delta \rangle$ ist. Aus der letzten Gleichung kann die zweite Behauptung aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x, u, \lambda)$ sofort abgelesen werden.

Bei der DGl. (1.4) sind die in Hilfssatz 1 gemachten Voraussetzungen erfüllt, wenn $Q(x, \lambda)$ eine im Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < \lambda < \infty$ stetige Funktion von x und λ ist. Es gilt dann

$$|U(x) - u(x)| \leqq \int_a^x e^{L(x-t)} |Q(t, \lambda) - Q(t, \Delta)| \sin^2 u \, dt,$$

wobei L die obere Grenze von $K(\lambda) = \mathrm{Max}|Q(x, \lambda) - 1|$ in $\langle \lambda, \Delta \rangle$ ist.

Hilfssatz 2. *Es sei $Q(x, \lambda)$ eine im Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $-\infty < \lambda < \infty$ stetige Funktion von x und λ; ferner sei dort der Differenzenquotient*

$$\frac{Q(x, \Delta) - Q(x, \lambda)}{\Delta - \lambda} \geqq 0,$$

[5]) Die Formulierung der beiden Hilfssätze, deren Ergebnis im wesentlichen bekannt ist (vgl. z. B. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 91, 95 und 274) ist hier auf die besondere Aufgabenstellung zugeschnitten, auch wird hier im Anschluß an die Arbeit [Q] ein besonders kurzer Beweis gegeben.

und sein Zähler möge nur dann für jeden Wert von x aus $\langle a, b\rangle$ verschwinden, wenn $\lambda = \Lambda$ ist. Sind dann $U(x)$ und $u(x)$ die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmenden Lösungen der DGln.

$$u' = \cos^2 u + Q(x, \Lambda)\sin^2 u, \quad u' = \cos^2 u + Q(x, \lambda)\sin^2 u,$$

so gilt im Grundintervall $U(x) \geqq u(x)$, und es ist $U(b) > u(b)$, also $u(b, \lambda)$ eine stetige, mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion.

Beweis. Die Existenz der Lösungen geht aus Hilfssatz 1 hervor. $U(x)$ ist eine Oberfunktion der DGl. mit $Q(x, \lambda)$. Da es ein Teilintervall gibt, in welchem $Q(x, \Lambda) > Q(x, \lambda)$ ist, folgt nach [Q], Satz 2, S. 232, daß $U(x)$ größer wird als $u(x)$, sobald

$$[Q(x, \Lambda) - Q(x, \lambda)]\sin^2 u$$

positiv wird, und es bleibt dann $U(x) > u(x)$. Der letzte Ausdruck wird aber positiv, sobald $Q(x, \Lambda) > Q(x, \lambda)$ wird, selbst an den Stellen, an denen $\sin u$ verschwindet, denn an diesen besitzt u' den Wert 1, so daß $\sin u$ nur isolierte Nullstellen besitzt. Da es demnach eine im Innern des Grundintervalls gelegene Stelle gibt, von welcher an $U(x) > u(x)$ ist, gilt erst recht $U(b) > u(b)$, w. z. b. w.

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß $Q(x, \lambda)$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes (2) genügt. Dann ist $u(b, \lambda)$ eine stetige, mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion des Parameters λ, und es bleibt zum Beweis des Oszillationssatzes nur noch übrig, Bedingungen anzugeben, unter denen $u(b, \lambda)$ den Wertevorrat $u_b \cdots +\infty$ durchläuft.

Oszillationssatz. *In der Sturmschen Randwertaufgabe*

$$\text{(S')} \qquad \begin{aligned} y'' + Q(x, \lambda)\, y &= 0, & a \leqq x \leqq b,\ a < b,\\ \alpha y(a) + \alpha' y'(a) &= 0, & \alpha^2 + \alpha'^2 > 0,\\ \beta y(b) + \beta' y'(b) &= 0, & \beta^2 + \beta'^2 > 0, \end{aligned}$$

erfülle $Q(x, \lambda)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2, und es gebe zwei Funktionen f und F, für die

$$f(x, u, \lambda) \leqq \cos^2 u + Q(x, \lambda)\sin^2 u \leqq F(x, u, \lambda)$$

ist und die in G den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 genügen. Sind dann $v(x)$, $u(x)$, $V(x)$ die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmenden Lösungen der DGln.

$$v' = f, \quad u' = \cos^2 u + Q\sin^2 u, \quad V' = F,$$

und gibt es im Grundintervall ein Teilintervall, in welchem für jedes λ

$$f[x, u(x), \lambda] < \cos^2 u + Q\sin^2 u < F[x, u(x), \lambda],$$

dann gilt

$$v(b, \lambda) < u(b, \lambda) < V(b, \lambda).$$

Gibt es eine Oberfunktion $V(x, \lambda)$, so daß die λ-Gleichung $V(b, \lambda) = u_b$ mindestens eine reelle Wurzel besitzt, und ist l_0 die größte dieser Wurzeln, so ist l_0 eine untere Schranke der Eigenwerte der Randwert-

aufgabe. Gibt es ferner eine Unterfunktion $v(x,\lambda)$, so daß $\lim_{\lambda\to+\infty} v(b,\lambda) = +\infty$ *ist, dann besitzt die Randwertaufgabe unendlich viele Eigenwerte, die eine monoton wachsende Zahlenfolge bilden,*

$$l_0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots.$$

Zu jedem dieser Eigenwerte gehört eine und nur eine mit stetiger Ableitung versehene Eigenfunktion, die nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist. Die zum Eigenwert λ_n gehörige Eigenfunktion $y(x,\lambda_n)$ besitzt im offenen Grundintervall genau n einfache Nullstellen.

Beweis. Die Existenz der Lösungen $v(x), u(x), V(x)$ ist auf Grund der Voraussetzungen gesichert. Nach [Q], Satz 2, S. 232 ist $V(x)$ eine Oberfunktion der DGl. (1.4) und somit $V(x) \geqq u(x)$. Gibt es ein Teilintervall, in welchem

$$F[x,u(x),\lambda] > \cos^2 u(x) + Q(x,\lambda)\sin^2 u(x),$$

dann überschreitet nach dem eben zitierten Satz die Oberfunktion $V(x)$ die Lösung $u(x)$, sobald die letzte Ungleichung eintritt, und es ist infolgedessen erst recht $V(b) > u(b)$. Entsprechendes gilt für die Unterfunktion $v(x)$, und man hat zunächt

$$v(b,\lambda) < u(b,\lambda) < V(b,\lambda),$$

wobei nach Hilfssatz 1 alle drei Funktionen stetig von λ abhängen. Gibt es eine Unterfunktion $v(x,\lambda)$, für welche $\lim_{\lambda\to+\infty} v(b,\lambda) = +\infty$ ist, dann ist erst recht $\lim_{\lambda\to+\infty} u(b,\lambda) = +\infty$. Besitzt außerdem die λ-Gleichung $V(b,\lambda) = u_b$ eine oder mehrere reelle Wurzeln und ist l_0 die größte unter ihnen, dann folgt wegen $u(b,\lambda) < V(b,\lambda)$ aus $V(b,l_0) = u_b$

$$u(b,l_0) < u_b.$$

Da aber $u(b,\lambda)$ eine stetige, mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion ist und $\lim_{\lambda\to+\infty} u(b,\lambda) = +\infty$ ist, gibt es eine und nur eine Zahl $\lambda_0 > l_0$, so daß $u(b,\lambda_0) = u_b$ ist. Wenn dann λ von l_0 aus unbegrenzt wächst, nimmt $u(b,\lambda)$ jeden der Werte $u_b + n\pi$ genau einmal an, womit der Oszillationssatz bewiesen ist.

1. Zusatz. *Ist n eine nichtnegative ganze Zahl, und sind l_n die größten Wurzeln der λ-Gleichungen*

$$V(b,\lambda) = u_b + n\pi,$$

und L_n die kleinsten der λ-Gleichungen

$$v(b,\lambda) = u_b + n\pi,$$

dann gilt für die Eigenwerte λ_n der Sturmschen *Randwertaufgabe* (S')

$$l_n < \lambda_n < L_n.$$

Beweis. Da $V(b,\lambda)$ stetig ist und größer als $v(b,\lambda)$, nimmt $V(b,\lambda)$ wegen $V(b,l_0) = u_b$ und $\lim_{\lambda\to+\infty} v(b,\lambda) = +\infty$ mindestens einmal jeden

der Werte $u_b + n\pi$ an, wenn λ von l_0 aus unbegrenzt wächst. Damit ist die Existenz der Wurzeln der Gl. $V(b,\lambda) = u_b + n\pi$ gesichert. Ist l_n die größte der Wurzeln, die zu einem festen n gehören, so ist $V(b,l_n) = u_b + n\pi$ und wegen $u(b,\lambda) < V(b,\lambda)$

$$u(b,l_n) < u_b + n\pi .$$

Da $u(b,\lambda)$ mit wachsendem λ stetig und monoton zunimmt, folgt $\lambda_n > l_n$. In der entsprechenden Weise zeigt man, daß $\lambda_n < L_n$, womit der Zusatz bewiesen ist.

Aus dem eben gegebenen Beweis des Oszillationssatzes folgt unmittelbar der folgende

2. Zusatz. *Ist N eine feste nichtnegative Zahl, und gibt es eine Oberfunktion $V(x,\lambda)$, bei welcher $V(b,\lambda)$ beständig unter $u_b + N\pi$ bleibt, bei welcher also die λ-Gleichung $V(b,\lambda) = u_b + N\pi$ keine Wurzel besitzt, so können Eigenwerte λ_n höchstens für $n < N$ existieren, d. h. die Randwertaufgabe kann höchstens eine endliche Anzahl von Eigenwerten besitzen. Gibt es andererseits eine Unterfunktion $v(x,\lambda)$, bei welcher $v(b,\lambda)$ beständig über $u_b + N'\pi$ bleibt, so können Eigenwerte höchstens für $n > N'$ existieren.*

Aus dem eben bewiesenen 1. Zusatz läßt sich ein Verfahren zur Bestimmung von oberen und unteren Schranken für die Eigenwerte gewinnen. Man hat dazu nur geeignete *von dem Parameter λ abhängige Ober- und Unterfunktionen der DGl.* (1.4) *zu konstruieren,* und die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$V(b,\lambda) = u_b + n\pi, \qquad v(b,\lambda) = u_b + n\pi \tag{2.1}$$

aufzusuchen. Von dieser Methode wird im folgenden in der verschiedensten Form Gebrauch gemacht werden. Bei ihrer Anwendung kann der Fall eintreten, daß die λ-Gleichungen (2.1) für gewisse nichtnegative ganzzahlige n keine Lösung besitzen. Ein solches Versagen rührt entweder davon her, daß einer der im 2. Zusatz erwähnten Fälle vorliegt oder daß die Lösung der DGl. (1.4) durch die gewählte Ober- und Unterfunktion nicht hinreichend genau angenähert wird. Es wird sich also im folgenden immer darum handeln, Ober- und Unterfunktionen der DGl. (1.4) aufzusuchen, welche die Lösung möglichst gut annähern.

§ 3.

Definition und Eigenschaften der Funktion $F(u,k)$.

An Stelle der trigonometrischen Funktionen des Sinus und des Cosinus, wie sie im Fall $Q = k^2$ (k reell und konstant) in der Lösung der Randwertaufgabe (S′) auftreten, erscheint bei der Behandlung der Randwertaufgabe (Σ) eine Funktion, der für die Untersuchung dieser Randwertaufgabe eine besondere Bedeutung zukommt, weswegen ihre wichtigsten Eigenschaften hier kurz beschrieben werden sollen. Es

ist die durch

$$F(u,k) = \int_0^u \frac{k\,dv}{\cos^2 v + k^2 \sin^2 v} \tag{3.1}$$

für reelles, positives k und beliebiges reelles u definierte Funktion der beiden Veränderlichen u und k. Mit ihrer Hilfe läßt sich die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmende Lösung $u(x,k)$ der DGl.

$$u' = \cos^2 u + k^2 \sin^2 u$$

implizite durch

$$F(u,k) - F(u_a,k) = k(x-a) \tag{3.2}$$

darstellen.

Nach (3.1) ist $F(u,k)$ eine stetige Funktion seiner beiden Argumente. Bei festem k ist $F(u,k)$ eine in u ungerade, mit wachsendem u monoton zunehmende Funktion; im Intervall $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$F(u,k) = \operatorname{Arctg}(k \operatorname{tg} u),$$

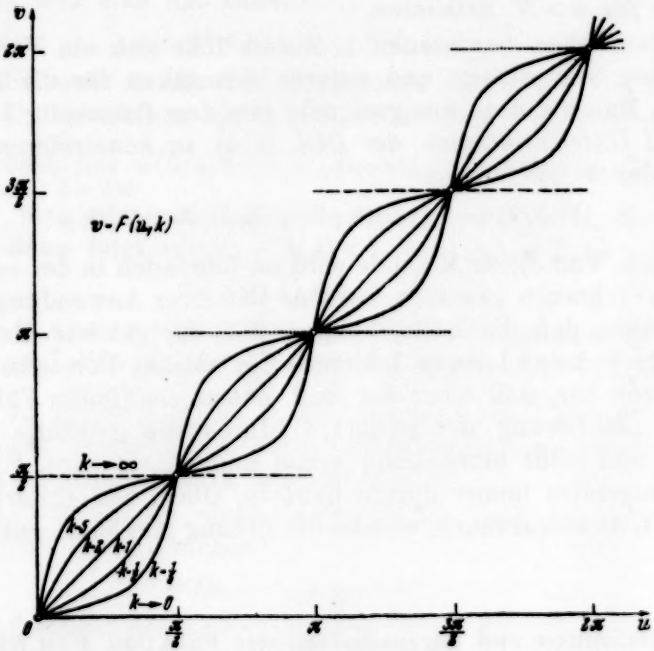


Fig. 1.

wobei unter Arctg der Hauptwert des Arcustangens verstanden werden soll. Da der Integrand in (3.1) in bezug auf u die Periode π besitzt, und

$$\lim_{u \to \frac{\pi}{2}} F(u,k) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{u \to -\frac{\pi}{2}} F(u,k) = -\frac{\pi}{2}$$

folgt

$$F(u+n\pi, k) - F(u, k) = n\pi \qquad (n \text{ ganze Zahl}). \tag{3.3}$$

Es genügt demnach, den Verlauf von $F(u, k)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$ zu kennen.

Einen ersten Einblick in das Verhalten von $F(u, k)$ als Funktion des Parameters k gibt der Verlauf von $F(u, 1)$ und der der beiden Grenzfunktionen $\lim\limits_{k\to\infty} F(u, k)$ und $\lim\limits_{k\to 0} F(u, k)$. Nach (3.1) ist $F(u, 1) = u$. Wegen $F(-u, k) = -F(u, k)$ und (3.3) genügt es, die beiden Grenzfunktionen im Intervall $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ zu untersuchen. Welches auch der Wert von $k > 0$ sei, es ist $F(0, k) = 0$ und $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2}$. Da

$$F(u, k) = \operatorname{Arctg}(k \operatorname{tg} u), \qquad 0 < u < \frac{\pi}{2},$$

folgt

$$\lim_{k\to\infty} F(u, k) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{k\to 0} F(u, k) = 0.$$

Somit ist die Grenzfunktion $\lim\limits_{k\to\infty} F(u, k)$ an den Stellen $u = n\pi$ (n ganze Zahl) unstetig und erleidet dort jeweils einen Sprung von der Größe π. Ihr Bild ist die in Fig. 1 *gestrichelt* eingezeichnete Treppenkurve. Dagegen ist die Grenzfunktion $\lim\limits_{k\to 0} F(u, k)$ an den Stellen $u = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n ganze Zahl) unstetig und besitzt dort einen Sprung von der Größe π. Ihr Bild ist die *punktierte* Treppenkurve der Fig. 1.

Die Kurven von $F(u, k)$ für beliebiges positives k verlaufen zwischen den beiden Treppenkurven. Fig. 1 entnimmt man noch, daß bei beliebigem positivem k

$$u - \frac{\pi}{2} \leqq F(u, k) \leqq u + \frac{\pi}{2},$$

also $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{F(u, k)}{u} = 1$ ist, d. h. $F(u, k)$ asymptotisch gleich u ist.

Als *Umkehrfunktion* von $v = F(u, k)$ findet man (vgl. auch Fig. 1)

$$u = F\left(v, \frac{1}{k}\right).$$

§ 4.

Erste Ober- und Unterfunktionen.

In diesem Paragraphen mögen einige elementare Konstruktionen von Ober- und Unterfunktionen $V(x, \lambda)$ und $v(x, \lambda)$ der DGl. (1.4) beschrieben werden. Dabei sei der triviale Fall $Q = \text{konst.}$ ausgeschlossen, und es werde vereinbart, daß, falls die λ-Gleichungen

$$v(b, \lambda) = u_b + n\pi, \quad V(b, \lambda) = u_b + n\pi$$

bei festem n mehrere voneinander verschiedene Wurzeln besitzen, bei der ersteren die kleinste der Wurzeln genommen wird, bei der letzteren die größte. Sind die Voraussetzungen des Oszillationssatzes erfüllt, dann sind diese Wurzeln L_n und l_n nach dem 1. Zusatz zu diesem *obere und untere Schranken der Eigenwerte* λ_n. Des öfteren wird auch eine Näherungsfunktion $U(x,\lambda)$ bestimmt werden, die $V(x,\lambda)$ nicht über- und $v(x,\lambda)$ nicht unterschreitet, bei welcher $U(b,\lambda)$ stetig von λ abhängt und $v(b,\lambda) < U(b,\lambda) < V(b,\lambda)$ ist. Es gibt dann bei festem n stets eine Wurzel der λ-Gleichung

$$U(b,\lambda) = u_b + n\pi$$

die zwischen l_n und L_n liegt und als *Näherungswert* ν_n *des Eigenwertes* λ_n genommen werden kann. Ist $U(b,\lambda)$ überdies noch eine mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion, dann besitzt die vorerwähnte λ-Gleichung nur einfache Wurzeln.

Satz 1. *Hängen die rechten Seiten der Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} n\pi + u_b - u_a &= \int_a^b \operatorname{Max}(1,Q)\,dx, \\ n\pi + u_b - u_a &= \int_a^b \operatorname{Min}(1,Q)\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (n = 0,1,\ldots)$$

von dem Parameter λ *ab, so sind die Wurzeln der ersten Gleichung untere Schranken, die Wurzeln der zweiten obere Schranken der Eigenwerte. Die Wurzeln der* λ*-Gleichung*

$$n\pi + u_b - u_a = \int_a^b \frac{1+Q}{2}\,dx$$

sind einfach und jeweils zwischen diesen Schranken liegende Näherungswerte der Eigenwerte.

Beweis. Setzt man unter Einführung des doppelten Winkels die DGl. (1.4) in die Form

$$u' = \frac{1+Q}{2} + \frac{1-Q}{2}\cos 2u,$$

so kann man ablesen, daß die DGln.

$$u' = \frac{1+Q}{2} + \left|\frac{1-Q}{2}\right| = \operatorname{Max}(1,Q),\quad u' = \frac{1+Q}{2} - \left|\frac{1-Q}{2}\right| = \operatorname{Min}(1,Q)$$

je eine Ober- und eine Unterfunktion der DGl. (1.4) liefern, während die DGl.

$$u' = \frac{1+Q}{2}$$

auf eine Näherungsfunktion führt, bei welcher $U(b,\lambda)$ gemäß den über $Q(x,\lambda)$ gemachten Voraussetzungen eine mit wachsendem λ monoton

zunehmende Funktion ist. Wegen

$$\mathrm{Min}\,(1, Q) \leqq \frac{1+Q}{2} \leqq \mathrm{Max}\,(1, Q)$$

ist

$$v(b, \lambda) < U(b, \lambda) < V(b, \lambda).$$

Da die Voraussetzungen des Oszillationssatzes erfüllt sind, ergibt sich alles weitere aus diesem.

Der eben bewiesene Satz liefert keine obere Schranke, wenn $Q \geqq 1$ ist, keine untere, wenn $Q \leqq 1$ ist. Erwartungsgemäß erhält man nur grobe Schranken und Näherungswerte, dafür ist aber auch nur ein geringer Aufwand an Rechenarbeit erforderlich.

Beispiel 1. Grundintervall: $0 \leqq x \leqq 1$, $Q(x, \lambda) = \lambda x$, Randwertaufgabe dritter Art: $u_a = \frac{3\pi}{4}$, $u_b = \frac{\pi}{4}$.

Der Satz gibt eine obere Schranke L_0 für den ersten Eigenwert, der hier negativ ist, untere Schranken l_n für die höheren Eigenwerte, und Näherungswerte ν_n für alle Eigenwerte.

$$l_n = (n - \tfrac{1}{2})\,\pi + |\sqrt{(n-\tfrac{1}{2})^2\pi^2 - 1}|, \quad \nu_n = 2\,[2\pi(n-1) - 1], \quad L_0 = -\pi.$$
$$(n = 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

n	0	1	2	3
l_n	—	2,95	9,30	15,6
ν_n	−8,28	4,28	16,9	29,8
L_n	$-\pi$	—	—	—

Der folgende Satz ist seinem Ergebnis nach von den klassischen Methoden der Sturmschen Randwertaufgabe her bekannt. Seine Formulierung erfolgt dort gewöhnlich im Anschluß an die Randwertaufgabe (S′). Die folgende Formulierung ist auf die Randwertaufgabe (Σ) zugeschnitten und als Zusammenfassung von drei Einzelsätzen zu verstehen.

Satz 2. *Es sei $G(k)$ die für positives k erklärte Funktion*

$$G(k) = F(u_a, k) - F(u_b, k) + \delta k, \qquad \delta = b - a,$$

und es gebe eine Zahl Λ, so daß für alle $\lambda > \Lambda$

a) *der größte Wert M, b) der kleinste Wert m, c) der Mittelwert* $\mu = \frac{1}{\delta}\int_a^b Q(x, \lambda)\,dx$ *von $Q(x, \lambda)$ positiv ist. Hängen M und m von λ ab*[6]*, dann sind die Wurzeln der λ-Gleichungen*

a) $G(\sqrt{M}) = n\pi$ *untere Schranken*, b) $G(\sqrt{m}) = n\pi$ *obere Schranken*, c) $G(\sqrt{\mu}) = n\pi$ *einfach und zwischen den aus* a) *und* b) *sich ergebenden Schranken gelegene Näherungswerte der Eigenwerte. Geht $Q(x, \lambda)$*

[6]) Bei μ ist dies nach Voraussetzung immer der Fall.

mit unbegrenzt wachsendem λ im Grundintervall gleichmäßig gegen $+\infty$, dann besitzt die Randwertaufgabe unendlich viele Eigenwerte.

Beweis. Es möge zunächst die Behauptung a) bewiesen werden. Ersetzt man in der DGl. (1.4) $Q(x,\lambda)$ durch M, so erhält man die DGl.

$$u' = \cos^2 u + M(\lambda)\sin^2 u.$$

Die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmende Lösung $V(x,\lambda)$ dieser DGl. ist nach (3.2) durch

$$F(V,\sqrt{M}) - F(u_a,\sqrt{M}) = (x-a)\sqrt{M}$$

gegeben und ist eine von λ abhängige Oberfunktion der DGl. (1.4). Da für $\lambda > \Lambda$ die Voraussetzungen des Oszillationssatzes erfüllt sind, sind nach diesem die Wurzeln der λ-Gleichung $V(b,\lambda) = u_b + n\pi$, also von

$$F(u_b + n\pi,\sqrt{M}) - F(u_a,\sqrt{M}) = \delta\sqrt{M}$$

untere Schranken der Eigenwerte. Nach (3.3) schreibt sich die letzte Gleichung

$$n\pi + F(u_b,\sqrt{M}) - F(u_a,\sqrt{M}) - \delta\sqrt{M} \equiv n\pi - G(\sqrt{M}) = 0,$$

womit die Behauptung a) bewiesen ist.

In entsprechender Weise verfährt man beim Beweis der Behauptung b). Führt man zum Beweis der Behauptung c) den Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{\delta}\int_a^b Q(x,\lambda)\,dx, \qquad \delta = b-a$$

ein, so hängt nach den über Q gemachten Voraussetzungen $\mu(\lambda)$ stetig von λ ab und nimmt mit wachsendem λ monoton zu. Die an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmende Lösung der DGl.

$$u' = \cos^2 u + \mu(\lambda)\sin^2 u$$

ist durch

$$F(U,\sqrt{\mu}) - F(u_a,\sqrt{\mu}) = (x-a)\sqrt{\mu}$$

gegeben und nach Hilfssatz 2 ist $U(b,\lambda)$ eine mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion. Wegen $m < \mu < M$ gilt auf Grund des Oszillationssatzes, dessen Voraussetzungen hier für $\lambda > \Lambda$ erfüllt sind,

$$v(b,\lambda) < U(b,\lambda) < V(b,\lambda),$$

womit die Behauptung c) bewiesen ist.

Da schließlich, wenn $Q(x,\lambda)$ im Grundintervall mit unbegrenzt wachsendem λ gleichmäßig gegen $+\infty$ geht, auch $m(\lambda)$ gegen $+\infty$ geht, folgt aus

$$F[v(b,\lambda),\sqrt{m}] - F[u_a,\sqrt{m}] = \delta\sqrt{m},$$

daß $v(b,\lambda)$ mit λ gegen $+\infty$ geht, und damit erst recht $u(b,\lambda)$, w. z. b. w.

Im allgemeinen erhält man nach c) schon sehr gute Näherungen an die Eigenwerte. Dieselben Näherungswerte, aber schärfere Schranken, gibt Satz 8.

Beispiel 2. Grundintervall: $0 \leqq x \leqq 1$, $Q(x,\lambda) = \lambda(1+x)$, Randwertaufgabe erster Art: $u_a = 0$, $u_b = \pi$.

Der eben ausgesprochene Satz liefert Schranken und Näherungswerte für alle Eigenwerte. Die Näherungswerte sind genauer als in den Schranken zum Ausdruck kommt (vgl. hierzu Beispiel 7).

$$l_n = \frac{\pi^2}{2}(n+1)^2, \quad \nu_n = \frac{2\pi^2}{3}(n+1)^3, \quad L_n = \pi^2(n+1)^2, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

n	0	1	2	3
l_n	4,93	19,7	44,4	79,0
ν_n	6,57	26,3	59,2	105
L_n	9,87	39,5	88,8	158

Satz 3. *Gibt es eine Zahl Λ, so daß für alle $\lambda > \Lambda$ der größte Wert M von Q positiv ist, dann sind die Wurzeln der λ-Gleichung*

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{M}) - F(u_a, \sqrt{M}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \int_a^b Q(x,\lambda)\, dx$$

obere Schranken der Eigenwerte λ_n. Die Randwertaufgabe besitzt unendlich viele Eigenwerte, wenn

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{M(\lambda)}} \int_a^b Q(x,\lambda)\, dx = +\infty.$$

Beweis. Ersetzt man auf der rechten Seite der DGl. (1. 4) $\cos^2 u$ durch $\frac{Q}{M}\cos^2 u$, so erhält man wegen $\frac{Q}{M} \leqq 1$ aus der elementar integrierbaren DGl.

$$u' = \frac{Q}{M}\cos^2 u + Q \sin^2 u$$

eine Unterfunktion $v(x,\lambda)$, die durch

$$F(v, \sqrt{M}) - F(u_a, \sqrt{M}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \int_a^x Q\, d\xi$$

gegeben ist. Da die rechte Seite der letzten DGl. für $\lambda > \Lambda$ den Voraussetzungen des Oszillationssatzes genügt, sind nach diesem die Wurzeln der im Satz erwähnten λ-Gleichung obere Schranken der Eigenwerte.

Ist die am Schluß des Satzes aufgeführte Grenzwertbedingung erfüllt, so geht $v(b,\lambda)$ mit unbegrenzt wachsendem λ über alle Grenzen und damit auch $u(b,\lambda)$, woraus die Existenz unendlich vieler Eigenwerte folgt. Damit ist der Satz bewiesen.

Der letzte Satz geht insofern über Satz 2 hinaus, als er gestattet, auch dann noch obere Schranken der Eigenwerte anzugeben, wenn Q nicht im ganzen Grundintervall positiv ist. Auch liefert er ein Kriterium für die Existenz unendlich vieler Eigenwerte, welches über das des Satzes 2 hinausgeht.

Beispiel 3. Grundintervall: $0 \leqq x \leqq 1$, $Q(x, \lambda) = \lambda x$, Randwertaufgabe erster Art: $u_a = 0$, $u_b = \pi$.

Die oberen Schranken sind nach Satz 3 berechnet, die unteren Schranken und die Näherungswerte nach Satz 2, der bei dieser Aufgabe keine oberen Schranken liefert, da die Voraussetzung $m > 0$ nicht erfüllt ist (vgl. hierzu Beispiel 8).

$l_n = \pi^2(n+1)^2$, $\nu_n = 2\pi^2(n+1)^2$, $L_n = 4\pi^2(n+1)^2$, $(n = 0, 1, \ldots)$.

n	0	1	2	3
l_n	9,87	39,5	88,8	158
ν_n	19,7	79,0	178	316
L_n	39,5	158	355	632

Im Anschluß an Satz 2 möge noch ein Verfahren zur Gewinnung einer Ober- und Unterfunktion $V(x, \lambda)$ und $v(x, \lambda)$, sowie einer zwischen diesen verlaufenden Näherungsfunktion $U(x, \lambda)$ beschrieben werden, das bei gegebenem Wert des Parameters λ gestattet, Funktionen zu konstruieren, welche die Lösung $u(x, \lambda)$ mit beliebiger Genauigkeit annähern. Dabei wird vorausgesetzt, daß es eine Zahl Λ gibt, so daß für alle $\lambda > \Lambda$ im Grundintervall $Q > 0$ ist.

Teilt man das Grundintervall $\langle a, b\rangle$ durch Zwischenpunkte

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_r = b$$

in r Teilintervalle $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ von der Länge $\delta_k = x_{k+1} - x_k$, so besitzt $Q(x, \lambda)$ nach Voraussetzung bei festem λ in jedem Teilintervall einen größten Wert $M_k > 0$. Für jedes der Intervalle läßt sich jeweils die Lösung der elementar integrierbaren DGl.

$$u' = \cos^2 u + M_k \sin^2 u$$

angeben, und die für die einzelnen Intervalle gefundenen Lösungen lassen sich so aneinandersetzen, daß eine stetige Funktion $V(x, \lambda)$ entsteht. Nach Konstruktion ist $V(x, \lambda)$ eine mit stückweise stetiger Ableitung versehene Oberfunktion der DGl. (1.4). Für das Teilintervall $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ ergibt sich nach (3.2)

$$F(V_{k+1}, \sqrt{M_k}) - F(V_k, \sqrt{M_k}) = \delta_k \sqrt{M_k} \quad (k = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{4.1}$$

wobei $V_0 = u_a$ zu setzen ist.

Dieselbe Konstruktion statt mit den M_k mit den m_k, also den kleinsten Werten von $Q(x, \lambda)$ in den Teilintervallen $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ durchgeführt, liefert eine Unterfunktion $v(x, \lambda)$; schließlich mit irgend welchen Werten μ_k, die $Q(x, \lambda)$ in den Teilintervallen $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ annimmt, durchgeführt, erhält man eine Näherungslösung $U(x, \lambda)$. Gilt in mindestens einem der Teilintervalle $m_k, < \mu_k < M_k$, dann ist

$$v(b, \lambda) < U(b, \lambda) < V(b, \lambda).$$

Zu den eben beschriebenen Konstruktionen einer Unter- und einer Näherungsfunktion gehört je ein (4.1) entsprechendes Gleichungssystem,

das aus (4.1) hervorgeht, indem man dort die V und M durch die v und m, bzw. durch die U und μ ersetzt. Damit hat man ein Verfahren, durch welches sich die zu einem gegebenen Wert von λ gehörige Lösung der DGl. (1.4) beliebig genau durch eine Ober- und eine Unterfunktion sowie eine zwischen diesen beiden verlaufende Näherungsfunktion annähern läßt.

Durch Addition der Gleichungen des Systems (4.1) folgt

$$\sum_{k=0}^{r-1} F(V_{k+1}, \sqrt{M_k}) - F(V_k, \sqrt{M_k}) = \sum_{k=0}^{r-1} \delta_k \sqrt{M_k}.$$

Liegen alle δ_k unter einer positiven Zahl δ' und geht man zur Grenze über, indem man $\delta' \to 0$ gehen läßt, so erhält man als Grenzwert der rechten Seite das bestimmte Integral $\int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda)}\, dx$. Infolgedessen besitzt die linke Seite auch einen Grenzwert, und es gilt

$$\lim_{\delta' \to 0} \sum_{k=0}^{r-1} F(V_{k+1}, \sqrt{M_k}) - F(V_k, \sqrt{M_k}) = \int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda)}\, dx.$$

Zu dieser Formel gehören entsprechende mit den v und m sowie den U und μ.

Aus (4.1) läßt sich eine Formel zur angenäherten Berechnung der Eigenwerte gewinnen. Ersetzt man nämlich im ersten Glied der linken Seite von (4.1) M_k durch M_{k+1}, so wird man, da sich $F(u,k)$ nur wenig mit k ändert, vermuten, daß sich das Gleichungssystem (4.1) mit guter Näherung durch das System

$$F(V_{k+1}, \sqrt{M_{k+1}}) - F(V_k, \sqrt{M_k}) = \delta_k \sqrt{M_k} \quad .(k = 0, 1, \ldots, r-1)$$

ersetzen läßt. Durch Addieren der Gleichungen dieses Systems folgt

$$F(V_r, \sqrt{M_r}) - F(V_0, \sqrt{M_0}) = \sum_{k=0}^{r-1} \delta_k \sqrt{M_k}.$$

Geht man zur Grenze über, indem man $\delta' \to 0$ gehen läßt, und ersetzt $\mathcal{V}(b)$ durch $u_b + n\pi$, so kommt nach (3.3)

$$n\pi + F[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}] - F[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}] = \int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda)}\, dx. \tag{4.2}$$

Damit ist man bei der bekannten „asymptotischen Formel" angelangt, die hier im Unterschied zu den üblichen mit der Randwertaufgabe (S') arbeitenden Darstellungen für die Randwertaufgabe (Σ) formuliert ist. Die Klärung der Frage, inwieweit die eben ausgesprochene Vermutung und damit die Formel (4.2) zu Recht besteht, wird in Satz 7 gegeben werden.

§ 5.

Erledigung eines Sonderfalles.

Ein Sonderfall, über den die im vorigen Paragraphen bewiesenen Sätze nur eine unvollständige oder gar keine Auskunft geben, liegt

vor, wenn $u_b \leqq u_a$ ist und der *erste Eigenwert* λ_0 in Schranken eingeschlossen werden soll. Wie der DGl. (1.4) zu entnehmen ist, muß in diesem Fall Q *negativer* Werte fähig sein. Ist $Q \leqq 1$, dann gibt Satz 1 wohl eine obere Schranke für λ_0, aber keine untere, und der eine untere Schranke liefernde Satz 2a) ist nicht mehr anwendbar, wenn $Q \leqq 0$ ist, da er von der Voraussetzung $M > 0$ ausgeht. Die Sätze dieses Paragraphen enthalten Verfahren, die gestatten, auch in diesem Sonderfall Eigenwertschranken zu bestimmen.

Satz 4. *Es seien* u_a *und* u_b *zwei Zahlen zwischen* 0 und π, *und es sei*

$$\delta = b - a, \qquad \varrho = \frac{1}{\delta}(\operatorname{ctg} u_b - \operatorname{ctg} u_a), \qquad \mu = \frac{1}{\delta}\int_a^b Q(x,\lambda)\,dx.$$

Gibt es dann einen Wert l_0 *des Parameters* λ, *so daß für alle* x des *Grundintervalls die Bedingung*

$$|\operatorname{ctg} u_a - \int_a^x Q\,d\xi + (\varrho+\mu)(x-a)| \leqq |\sqrt{-\mu-\varrho}|$$

erfüllt ist, so ist l_0 *eine untere Schranke für den ersten Eigenwert* λ_0.

Beweis. Um eine *untere* Schranke für den ersten Eigenwert λ_0 zu bestimmen, hat man nach dem Oszillationssatz eine von λ abhängige *Oberfunktion* der DGl. (1.4) aufzusuchen. Zur Vereinfachung der Betrachtungen wird man hier die DGl. (1.4) vermöge

$$\operatorname{ctg} u = t, \qquad 0 < u < \pi$$

in die Riccatische DGl. (5.1) überführen.

(5.1) $$t' = Q^* - t^2, \qquad Q^* = -Q.$$

Da $\operatorname{ctg} u$ eine mit u abnehmende Funktion ist, hat man, wenn man eine *Oberfunktion* von (1.4) erhalten will, von (5.1) eine *Unterfunktion* zu bestimmen. Zu einer solchen gelangt man auf folgende Weise. Man ersetzt (5.1) durch die DGl.

$$t' = Q^* - \mu^* + \varrho, \qquad \mu^* = -\mu,$$

in welcher $\varrho = \frac{1}{\delta}(t_b - t_a)$. Die an der Stelle $x = a$ den Wert $t_a = \operatorname{ctg} u_a$ annehmende Lösung dieser DGl. ist

$$s(x,\lambda) = t_a + \int_a^x Q^*\,d\xi - (\mu^* - \varrho)(x-a),$$

und es ist $s(b,\lambda) = t_b = \operatorname{ctg} u_b$, d. h. die Lösung $s(x,\lambda)$ erfüllt, welches auch der Wert von λ sei, die beiden vorgeschriebenen Randbedingungen.

Es bleibt noch festzustellen, unter welcher Bedingung $s(x,\lambda)$ eine Unterfunktion von (5.1) ist. Diese Frage läßt sich nach [Q], S. 333 mit Hilfe des Begriffs des „Fehlers“ (Restes)[7]) einer DGl entscheiden.

[7]) H. Buckner, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 22 (1942), S. 143 bedient sich der Bezeichnung „Dezifit“. Da bei der letzteren die Gefahr einer Verwechslung ausgeschlossen ist und diese Bezeichnung somit in der Arbeit [Q] benutzten vorzuziehen ist, möge im folgenden durchgängig die Bezeichnung „Dezifit“ gebraucht werden.

Ist das mit s gebildete Defizit h der DGl. (5.1) im Grundintervall $\leqq 0$, so ist s eine Unterfunktion der DGl. (5.1). Da

$$h = s' - Q^* + s^2 = s^2 + \varrho - \mu^*,$$

ist s somit eine Unterfunktion, wenn es einen Wert l_0 des Parameters λ gibt, so daß für alle x des Grundintervalls

$$|s| \leqq |\sqrt{\mu^* - \varrho}|,$$

also

$$|t_a + \int_a^x Q^* d\xi - (\mu^* - \varrho)(x-a)| \leqq |\sqrt{\mu^* - \varrho}|$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 4. Dieselbe Aufgabe wie bei Beispiel 1. Nach dem eben ausgesprochenen Satz ist die untere Schranke für den ersten Eigenwert aus der Bedingung

$$\left|-1 - \frac{\lambda}{2} x^2 + \left(2 - \frac{\lambda}{2} x\right)\right| \leqq \left|\sqrt{-2 - \frac{\lambda}{2}}\right|$$

zu bestimmen. Man findet so $l_0 = -6{,}53$.

Hat man in dem in Rede stehenden Sonderfall mit Hilfe von Satz 1 eine obere Schranke L_0 für den ersten Eigenwert bestimmt und festgestellt, daß $Q(x, L_0) < 0$, oder geht aus der Randwertaufgabe unmittelbar hervor, daß $Q(x, \lambda_0) < 0$ sein muß, so kann man an Hand des folgenden Satzes, der von den klassischen Methoden her bekannt und ein Analogon zu Satz 2 ist, Schranken für den ersten Eigenwert bestimmen, die im allgemeinen schärfer ausfallen werden als die von Satz 1 und 4.

Satz 5. *Ist $0 < u_b < u_a < \pi$, und gibt es eine Zahl Λ, so daß für alle $\lambda < \Lambda$ die Ungleichung $m \leqq Q \leqq M < 0$ erfüllt ist, wobei m und M von λ abhängen, so sind die Wurzeln der λ-Gleichungen*

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-m}}\Big|_{u_a}^{u_b} = \delta\sqrt{-m},$$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-M}}\Big|_{u_a}^{u_b} = \delta\sqrt{-M}, \qquad \delta = b - a,$$

obere und untere Schranken des ersten Eigenwertes, während die Wurzeln der λ-Gleichung

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-\mu}}\Big|_{u_a}^{u_b} = \delta\sqrt{-\mu}, \qquad \mu = \frac{1}{\delta}\int_a^b Q(x,\lambda)\,dx$$

ein zwischen diesen Schranken liegender Näherungswert des ersten Eigenwertes ist. Geht $Q(x, \lambda)$ für $\lambda \to -\infty$ im Grundintervall gleichmäßig gegen $-\infty$, so gilt $\lim_{\lambda \to -\infty} u(b, \lambda) = 0$.

Beweis. Es sei k eine reelle positive Zahl. Ersetzt man in der DGl. (1.4) Q durch die negative Konstante $-k^2$, so erhält man die

elementar integrierbare DGl.

$$u' = \cos^2 u - k^2 \sin^2 u.$$

Ihre an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmende Lösung $u(x, k)$ ist durch

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\operatorname{ctg} u}{k}\Big|_{u_a}^{u} = k(x - a)$$

gegeben; $u(x, k)$ ist eine mit wachsendem x monoton abnehmende Funktion. Da die DGln.

$$u' = \cos^2 u + M \sin^2 u, \quad u' = \cos^2 u + m \sin^2 u$$

auf je eine Ober- und Unterfunktion $V(x, \lambda)$ und $v(x, \lambda)$ der DGl. (1. 4) führen, folgt nach dem Oszillationssatz die im ersten Teil des Satzes ausgesprochene Behauptung.

Aus der DGl.

$$u' = \cos^2 u + \mu \sin^2 u$$

erhält man eine Näherungslösung $U(x, \lambda)$, bei welcher $U(b, \lambda)$ mit wachsendem λ monoton zunimmt. Da $m < \mu < M$ gilt, folgt alles weitere aus dem Oszillationssatz.

Da schließlich, wenn $Q(x, \lambda)$ für $\lambda \to -\infty$ im Grundintervall gleichmäßig gegen $-\infty$ geht, auch $M(\lambda) \to -\infty$ geht, folgt aus

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-M}}\Big|_{u_a}^{V(b,\lambda)} = \delta\sqrt{-M},$$

daß $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} V(b, \lambda) = 0$ ist und somit erst recht $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} u(b, \lambda) = 0$ gilt, womit der Satz bewiesen ist.

Beispiel 5. Grundintervall: $0 \leqq x \leqq 1$, $Q(x, \lambda) = \lambda(1 + x)$, Randwertaufgabe dritter Art: $u_a = \frac{3\pi}{4}$, $u_b = \frac{\pi}{4}$.

Aus Satz 5 folgt: Ist ξ die positive Wurzel der Gleichung $x\,\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{2} = 1$, dann ist

$$l_0 = -\xi^2, \quad \nu_0 = -\tfrac{2}{3}\xi^2, \quad L_0 = -\frac{\xi^2}{2}.$$

Mit $\xi = 1{,}543$ erhält man so

$$l_0 = -2{,}38, \quad \nu_0 = -1{,}58, \quad L_0 = -1{,}19.$$

Setzt man statt $Q < 0$ nur $Q \leqq 0$ voraus, dann kann man aus Satz 5 nur noch eine *obere* Schranke und einen Näherungswert entnehmen, denn in diesem Fall ist $M = 0$, und die aus $u' = \cos^2 u$ hervorgehende Oberfunktion hängt nicht mehr von dem Parameter λ ab. Zur Bestimmung einer *unteren* Schranke wird man in diesem Fall auf den vorhergehenden Satz 4 zurückgreifen.

Der folgende Satz, ein Gegenstück zu Satz 3, gibt, auch wenn nur $Q \leqq 0$ vorausgesetzt wird, eine *obere* Schranke des ersten Eigenwertes, die im allgemeinen schärfer ausfallen wird als die von Satz 5.

Satz 6. *Ist* $0 < u_b < u_a < \pi$, *und gibt es eine Zahl* Λ, *so daß für alle* $\lambda < \Lambda$ *die Ungleichung* $m \leqq Q \leqq 0$ *erfüllt ist, wobei* m *von* λ *abhängt, so ist die Wurzel der* λ*-Gleichung*

$$\operatorname{Ar}\operatorname{Tg} \frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-m}}\Big|_{u_a}^{u_b} = -\int_a^b \frac{Q}{\sqrt{-m}}\, dx$$

eine obere Schranke des ersten Eigenwertes.

Beweis. Ersetzt man die DGl. (1. 4) durch die elementar integrierbare

$$u' = \frac{Q}{m}\cos^2 u + Q \sin^2 u,$$

so ist deren durch

$$\operatorname{Ar}\operatorname{Tg} \frac{\operatorname{ctg} u}{\sqrt{-m}}\Big|_{u_a}^{u} = -\int_a^x \frac{Q}{\sqrt{-m}}\, d\xi$$

gegebene Lösung eine Unterfunktion der DGl. (1. 4), denn es ist $\frac{Q}{m} \leqq 1$. Danach folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar aus dem Oszillationssatz.

Beispiel 6. Dieselbe Aufgabe wie bei den Beispielen 1 und 4. Mit Hilfe des letzten Satzes läßt sich eine obere Schranke des ersten Eigenwertes bestimmen, die schärfer ist als die von Satz 1. Ist ξ die positive Wurzel der Gleichung $x \operatorname{Tg} x = \frac{1}{4}$, dann ist $L_0 = -16\,\xi^2$. Mit $\xi = 0{,}5218$ erhält man so $L_0 = -4{,}35$. In Verbindung mit dem Ergebnis von Beispiel 4 hat man somit

$$-6{,}53 < \lambda_0 < -4{,}35.$$

§ 6.

Schärfere Eigenwertschranken.

Wenn auch die Sätze des § 4 zur ersten Orientierung über die Lage der Eigenwerte recht brauchbar sind, so geben sie im allgemeinen doch nur grobe Schranken. Die Frage nach schärferen Schranken wird im folgenden mit Hilfe eines allgemeineren Ansatzes in Angriff genommen. Dabei werden sich die am Schluß des § 4 aufgestellte asymptotische Formel sowie eine weitere Formel ähnlicher Art ergeben, insbesondere auch Schranken, für die aus der asymptotischen Formel hervorkommenden Näherungswerte.

Nach Satz 2 stellt die durch

$$F(U, \sqrt{\mu}) = F(u_a, \sqrt{\mu}) + \sqrt{\mu}\,(x - a)$$

implizite gegebene Funktion $U(x, \lambda)$ eine brauchbare Näherungslösung der DGl. (1. 4) dar. Ersetzt man zum Zwecke der Verallgemeinerung der letzten Gleichung auf ihrer linken Seite $\sqrt{\mu}$ durch eine Funktion $R(x, \lambda)$ und ihre rechte Seite durch eine Funktion $P(x, \lambda)$, so kann

man erwarten, daß sich durch geeignete Wahl der Funktionen R und P ein $U(x,\lambda)$ gewinnen läßt, welches die Lösung $u(x,\lambda)$ von (1.4) besser annähert als das mit Satz 2 gegebene. Dementsprechend möge eine Näherungsfunktion durch

$$F(U,R) = P$$

erklärt werden. Hierin sind $R(x,\lambda)$ und $P(x,\lambda)$ noch näher zu kennzeichnende Funktionen, wobei der Definition von $F(u,k)$ entsprechend $R>0$ vorauszusetzen ist.

Die Erfüllung der ersten Randbedingung von (Σ) verlangt

$$P_a = F[u_a, R(a,\lambda)].$$

Sind R und P nach x differentiierbar, dann ist maßgebend für die Güte, mit welcher die eben definierte Funktion $U(x,\lambda)$ die Lösung $u(x,\lambda)$ von (1.4) approximiert, das mit U gebildete Defizit der DGl. (1.4)

$$h(x,\lambda) = U' - \cos^2 U - Q\sin^2 U.$$

Da $F(u,k)$ mit einem Wert von $\operatorname{arctg}(k\operatorname{tg}u)$ identisch ist und so mit U mit einem Wert von $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{R}\operatorname{tg}P\right)$, folgt durch Einsetzen von U in die letzte Gleichung

$$(6.1)\quad h(x,\lambda) = \frac{(P'R - R^2)\cos^2 P + (P'R - Q)\sin^2 P - R'\sin P\cos P}{R^2\cos^2 P + \sin^2 P}.$$

Der Zähler dieses Bruches schreibt sich kurz

$$Z = A\cos^2 P + B\sin^2 P + 2C\sin P\cos P.$$

Er ist eine quadratische Form in $\cos P$ und $\sin P$. Das Ziel ist, die Funktionen P und R so zu bestimmen, daß der Maximalbetrag von Z klein wird. Dazu bemerkt man, daß Z nach Einführung des doppelten Winkels $2P$ in die Form

$$2Z = A + B + (A-B)\cos 2P + 2C\sin 2P$$

übergeht. Daraus schließt man

$$A+B-\left|\sqrt{(A-B)^2+4C^2}\right| \leqq 2Z \leqq A+B+\left|\sqrt{(A-B)^2+4C^2}\right|.$$

Der Maximalbetrag von Z läßt sich zunächst dadurch klein machen, daß das Maximum von Z entgegengesetzt gleich dem Minimum gemacht wird. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn

$$(6.2)\quad A + B = 0.$$

Ist die letzte Gleichung erfüllt, so besitzt 2Z den Maximalbetrag

$$\left|\sqrt{(A-B)^2+4C^2}\right|$$

Dieser läßt sich weiter dadurch verkleinern, daß man beispielsweise

$$(6.3)\quad A - B = 0$$

fordert. Der Maximalbetrag von Z ist dann $|C|$.

Aus den beiden eben angeschriebenen Gleichungen (6.2) und (6.3) folgt

$$A = B = P'R - R^2 = P'R - Q = 0,$$

und hieraus

$$R = \sqrt{Q}\,, \quad P' = \sqrt{Q}\,, \quad P = P_a + \int_a^x \sqrt{Q}\, d\xi.$$

Gibt es also eine Zahl Λ, so daß für alle $\lambda > \Lambda$ die Funktion $Q(x, \lambda)$ im Grundintervall positiv ist, so erhält man als Näherungslösung $U(x, \lambda)$, welche die erste Randbedingung von Σ erfüllt,

$$F[U, \sqrt{Q(x,\lambda)}] - F[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}] = \int_a^x \sqrt{Q(\xi,\lambda)}\, d\xi. \tag{6.4}$$

Ist Q im Grundintervall für jedes feste $\lambda > \Lambda$ nach x differentiierbar, so existiert das Defizit von U und ist nach (6.1)

$$h = -\frac{Q'}{4\sqrt{Q}} \frac{\sin^2 P}{Q\cos^2 P + \sin^2 P}.$$

Mit der durch (6.4) gegebenen Näherungslösung U folgt aus der λ-Geichung $U(b, \lambda) = u_b + n\pi$

$$n\pi + F[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}] - F[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}] = \int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda)}\, dx,$$

womit man wieder bei der schon oben in § 4 aufgestellten „asymptotischen Formel" angelangt ist.

Der eben eingeschlagene Weg zur näherungsweisen Integration der Prüferschen DGl. (1.4) führt aber nicht nur auf eine brauchbare Näherungslösung, sondern gibt gleichzeitig auch eine Ober- und Unterfunktion dieser DGl. Zunächst entnimmt man (6.1) eine DGl. für P, die sich durch Nullsetzen des Defizits, also des Zählers von (6.1), ergibt:

$$P'R = R^2 \cos^2 P + Q \sin^2 P + R' \sin P \cos P. \tag{6.5}$$

Setzt man hierin, wie eben bei der Bestimmung der Näherungslösung geschehen, $R = \sqrt{Q}$, so geht (6.5) über in die DGl.

$$P' = \sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q} \sin 2P, \tag{6.6}$$

und der Randwertaufgabe (Σ) läßt sich somit die folgende Randwertaufgabe (Σ_1) über die Funktion $P(x, \lambda)$ zur Seite stellen:

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{aligned} P' &= \sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q} \sin 2P, \\ P_a &= F[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}], \quad P_b = F[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}] + n\pi. \end{aligned}$$

Um die Existenz und die Eigenschaften der Lösung $P(x, \lambda)$ von (6.6) zu erkennen, setze man

$$P = P_a + \int_a^x \sqrt{Q}\, d\xi + p.$$

Dann genügt p der DGl.

$$p' = \frac{Q'}{4Q} \sin 2\left(P_a + \int_a^x \sqrt{Q}\, d\xi + p\right) \tag{6.7}$$

mit der Anfangsbedingung $p_a = 0$.

Ist $Q'(x, \lambda)$ eine im Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $\Lambda < \lambda < \infty$ stetige Funktion, dann sind für die rechte Seite von (6.7) die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt. Somit existiert eine und nur eine Lösung $p(x, \lambda)$, und diese besitzt die im Hilfssatz ausgesprochenen Eigenschaften. Dann existiert aber auch eine und nur eine Lösung $P(x, \lambda)$ von (6.6), welche an der Stelle $x = a$ den Wert P_a annimmt, und $P(x, \lambda)$ ist eine bei festem λ im Grundintervall stetige Funktion von x, für welche gleichmäßig im Grundintervall $P(x, \lambda^*) \to P(x, \lambda)$, wenn $\lambda^* \to \lambda$.

Aus (6.6) liest man ab, daß $P' = \sqrt{Q}$ eine Näherungslösung liefert, und die DGln.

$$P' = \sqrt{Q} \pm \frac{|Q'|}{4Q}$$

je eine Ober- und Unterfunktion von (6.6), die mit $\overline{P}$ und $\underline{P}$ bezeichnet werden mögen. Aus $\overline{P}$ erhält man aber eine Oberfunktion $\overline{V}(x, \lambda)$ von (1.4), die durch

$$F\left[V, \sqrt{Q(x,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^x \left[\sqrt{Q(\xi,\lambda)} + \frac{|Q'(\xi,\lambda)|}{4\,Q(\xi,\lambda)}\right] d\xi \tag{6.8}$$

gegeben ist, denn das Defizit von V ist nach (6.1)

$$h = \frac{|Q'|}{4\sqrt{Q}} \frac{1 - \operatorname{sgn} Q' \cdot \sin 2\overline{P}}{Q \cos^2 \overline{P} + \sin^2 \overline{P}} \geqq 0.$$

In entsprechender Weise folgt aus $\underline{P}$ eine Unterfunktion $v(x, \lambda)$ von (1.4)

$$F\left[v, \sqrt{Q(x,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^x \left[\sqrt{Q(\xi,\lambda)} - \frac{|Q'(\xi,\lambda)|}{4\,Q(\xi,\lambda)}\right] d\xi. \tag{6.9}$$

Ihr Defizit ist

$$h = -\frac{|Q'|}{4\sqrt{Q}} \frac{1 + \operatorname{sgn} Q' \cdot \sin 2\underline{P}}{Q \cos^2 \underline{P} + \sin^2 \underline{P}} \leqq 0.$$

Entsprechend den über $Q(x, \lambda)$ gemachten Voraussetzungen hängen, wie man den Gleichungen (6.4), (6.8) und (6.9) entnimmt, $U(b, \lambda)$, $V(b, \lambda)$ und $v(b, \lambda)$ stetig von λ ab, und es gilt

$$v(b, \lambda) < U(b, \lambda) < V(b, \lambda).$$

Danach ergibt sich aus dem Oszillationssatz der folgende

Satz 7. *Gibt es eine Zahl Λ, so daß die im Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $\Lambda < \lambda < \infty$ stetige Funktion $Q(x, \lambda)$ dort positiv ist und eine stetige*

Ableitung $Q'(x,\lambda)$ besitzt, dann sind die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F\left[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^b \left[\sqrt{Q(x,\lambda)} \pm \frac{|Q'(x,\lambda)|}{4\,Q(x,\lambda)}\right] dx,$$

$$(n = 0, 1, \ldots)$$

untere und obere Schranken der Eigenwerte. Die Wurzeln der λ-Gleichung

$$n\pi + F\left[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda)}\, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

sind zwischen diesen Schranken liegende Näherungswerte der Eigenwerte. Die Randwertaufgabe besitzt unendlich viele Eigenwerte, wenn

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \left[\sqrt{Q(x,\lambda)} - \frac{|Q'(x,\lambda)|}{4\,Q(x,\lambda)}\right] dx = +\infty.$$

Beispiel 7. Dieselbe Aufgabe wie in Beispiel 2. Der Satz liefert hier sehr gute Schranken und Näherungswerte [8]). Diese sind

$$l_n = \left[\frac{3}{2}\,\frac{(n+1)\,\pi - \frac{1}{4}\ln 2}{2\sqrt{2}-1}\right]^2, \quad \nu_n = \left[\frac{3}{2}\,\frac{(n+1)\,\pi}{2\sqrt{2}-1}\right]^2, \quad L_n = \left[\frac{3}{2}\,\frac{(n+1)\,\pi + \frac{1}{4}\ln 2}{2\sqrt{2}-1}\right]^2,$$

$$(n = 0, 1, \ldots)$$

n	0	1	2	3
l_n	6,31	25,8	58,7	104
ν_n	6,62	26,6	59,8	106
L_n	6,94	27,2	60,7	108

Zu einem weiteren Satz über Eigenwertschranken gelangt man, wenn man, um dem quadratischen Ausdruck Z einen kleinen Wert zu erteilen, die Gleichung (6.2) aufrecht erhält, dagegen (6.3) durch die Forderung $C = 0$ ersetzt. Damit hat man zunächst $R =$ konst. Setzt man dementsprechend

$$R = \sqrt{\mu},$$

wobei man voraussetzen wird, daß es eine Zahl Λ gibt, so daß für alle $\lambda > \Lambda$ der Mittelwert μ von $Q(x,\lambda)$ positiv ist, dann erhält man aus (6.2)

$$P' = \frac{Q+\mu}{2\sqrt{\mu}}, \qquad P = P_a + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_a^x (Q+\mu)\, d\xi,$$

worin $P_a = F(u_a, \sqrt{\mu})$ ist. Die damit gewonnene Näherungsfunktion $U(x,\lambda)$ ist durch

$$F(U, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_a^x (Q+\mu)\, d\xi \tag{6.10}$$

[8]) Vgl. hierzu die Ausführungen über die asymptotische Formel in dem in Fußnote 1 genannten Bericht von L. Collatz, S. 301 u. 315.

gegeben. Ihr Defizit ist nach (6.1)

$$h = \frac{1}{2} \frac{(Q-\mu)\cos 2P}{\mu \cos^2 P + \sin^2 P}.$$

Aus $U(x,\lambda)$ ergibt sich die folgende Formel zur Bestimmung von Näherungswerten der Eigenwerte:

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \int_a^b (Q+\mu)\, dx = \delta\sqrt{\mu}.$$

Das ist aber dieselbe Formel, die schon oben in § 4, Satz 2 aufgestellt wurde.

Zu der eben gefundenen Näherungsfunktion $U(x,\lambda)$ läßt sich wieder eine Ober- und Unterfunktion $V(x,\lambda)$ und $v(x,\lambda)$ angeben, welche Schranken der ersteren darstellen. Hierzu stellt man zunächst wie beim Beweis von Satz 7 die entsprechende DGl. für $P(x,\lambda)$ auf. Mit $R = \sqrt{\mu}$ geht (6.5) über in

$$P' = \frac{\mu+Q}{2\sqrt{\mu}} + \frac{\mu-Q}{2\sqrt{\mu}} \cos 2P. \tag{6.11}$$

In entsprechender Weise wie bei Satz 7 erkennt man, daß eine an der Stelle $x = a$ den Wert $P_a = F(u_a, \sqrt{\mu})$ annehmende Lösung $P(x,\lambda)$ von (6.11) existiert, welche die in Hilfssatz 1 beschriebenen Eigenschaften besitzt, und daß der Randwertaufgabe (Σ) die folgende (Σ_1) entspricht:

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{aligned} P' &= \frac{\mu+Q}{2\sqrt{\mu}} + \frac{\mu-Q}{2\sqrt{\mu}} \cos 2P, \\ P_a &= F(u_a, \sqrt{\mu}), \quad P_b = F(u_b, \sqrt{\mu}) + n\pi. \end{aligned}$$

Aus (6.11) erhält man außer der aus

$$P' = \frac{\mu+Q}{2\sqrt{\mu}}$$

folgenden, eben behandelten Näherungslösung zunächst je eine Ober- und Unterfunktion $\overline{P}$ und $\underline{P}$ von (6.11), die aus

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{Max}(\mu, Q), \qquad P' = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{Min}(\mu, Q)$$

hervorgehen. Aus $\overline{P}$ ergibt sich wieder eine Oberfunktion $V(x,\lambda)$:

$$F(V, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_a^b \operatorname{Max}(\mu, Q)\, d\xi \tag{6.12}$$

mit dem Defizit

$$h = \frac{|\mu - Q|}{2} \frac{1 - \operatorname{sgn}(\mu - Q) \cdot \cos 2\overline{P}}{\mu \cos^2 \overline{P} + \sin^2 \overline{P}} \geqq 0.$$

Ebenso aus $\underline{P}$ eine Unterfunktion $v(x, \lambda)$:

$$F(v, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_a^x \operatorname{Min}(\mu, Q)\, d\xi \tag{6.13}$$

mit dem Defizit

$$h = -\frac{|\mu - Q|}{2} \frac{1 + \operatorname{sgn}(\mu - Q) \cdot \cos 2\underline{P}}{\mu \cos^2 \underline{P} + \sin^2 \underline{P}} \leqq 0.$$

Nach (6.10), (6.12) und (6.13) hängen unter den über $Q(x, \lambda)$ gemachten Voraussetzungen $U(b, \lambda)$, $V(b, \lambda)$ und $v(b, \lambda)$ stetig von λ ab, und es gilt

$$v(b, \lambda) < V(b, \lambda) < V(b, \lambda).$$

Außerdem ist $U(b, \lambda)$ wie man dem Beweis von Satz 2 entnimmt, eine mit wachsendem λ monoton zunehmende Funktion. In Verbindung mit dem Oszillationssatz ergibt sich so der folgende

Satz 8. *Gibt es eine Zahl Λ, so daß für alle $\lambda > \Lambda$ der Mittelwert*

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{\delta} \int_a^b Q(x, \lambda)\, dx, \qquad \delta = b - a$$

der im Gebiet $a \leqq x \leqq b$, $\Lambda < \lambda < \infty$ stetigen Funktion $Q(x, \lambda)$ positiv ist, dann sind die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_a^b \begin{matrix}\operatorname{Max}\\ \operatorname{Min}\end{matrix} (\mu, Q)\, dx \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

untere und obere Schranken der Eigenwerte. Die Wurzeln der λ-Gleichung

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \delta \sqrt{\mu} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

sind einfach und zwischen diesen Schranken liegende Näherungswerte der Eigenwerte Die Randwertaufgabe besitzt unendlich viele Eigenwerte, wenn

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_a^b \operatorname{Min}(\mu, Q)\, dx = +\infty.$$

Beispiel 8. Dieselbe Aufgabe wie in Beispiel 3. Satz 7 ist hier nicht anwendbar, da die Voraussetzung $Q > 0$ nicht erfüllt ist. Der letzte Satz gibt die folgenden Schranken und Näherungswerte [9])

$$l_n = \frac{32\pi^2}{25}(n+1)^2, \quad \nu_n = 2\pi^2(n+1)^2, \quad L_n = \frac{32\pi^2}{9}(n+1)^2,$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

[9]) Nach G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Berlin und Leipzig 1937, S. 130, ist $\lambda_0 = 18{,}956$.

n	0	1	2	3
l_n	12,6	50,5	113	202
ν_n	19,7	79	178	316
L_n	35,1	141	316	562

Bemerkung. Die eben formulierten Randwertaufgaben (Σ_1) und (Σ_2) lassen sich nicht nur aus der PRÜFERschen Randwertaufgabe (Σ) gewinnen, sondern auch unmittelbar aus der Randwertaufgabe zweiter Ordnung (S'). Benutzt man nämlich an Stelle der PRÜFERschen die Transformation

$$y = \frac{Y}{R}\sin P, \quad y' = Y\cos P, \tag{6.14}$$

so ergibt sich für P die DGl. (6.5), und es ist

$$Y = C\exp\int_a^x \left[\frac{1}{2}\left(R - \frac{Q}{R}\right)\sin 2P + \frac{R'}{R}\sin^2 P\right] d\xi.$$

Die Randbedingungen von (S') gehen dabei über in

$$\alpha\sin P_a + \alpha' R(a,\lambda)\cos P_a = 0, \qquad 0 \leqq P_a < \pi,$$
$$\beta\sin P_b + \beta' R(b,\lambda)\cos P_b = 0, \qquad 0 < P_b \leqq \pi.$$

Mit $R = \sqrt{Q}$ gelangt man so unmittelbar von (S') auf die Randwertaufgabe (Σ_1)[10], mit $R = \sqrt{\mu}$ auf (Σ_2).

§ 7.

Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte.

Von den Entwicklungen, die zu dem eben ausgesprochenen Satz 7 führten, gelangt man ohne sonderliche Mühe zu einer Aussage über das asymptotische Verhalten der Eigenwerte. Es gilt da der folgende an Satz 7 anknüpfende

Satz 9. *Besitzt die Randwertaufgabe unendlich viele Eigenwerte, und sind die Voraussetzungen des Satzes 7 sowie die Bedingung*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \frac{|Q'|}{Q}\,dx : \int_a^b \sqrt{Q}\,dx = 0 \tag{7.1}$$

erfüllt, dann gilt unabhängig von den Randbedingungen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda_n)}\,dx = \pi.$$

---

[10]) Die Transformation (6.14) mit $R = \sqrt{Q}$ findet sich schon bei E. MAKAI, Compositio Math. **6** (1939), S. 365; Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) **10** (1941), S. 123. Diesen Hinweis verdanke ich Herrn E. KAMKE.

Beweis. Es sei $P(x, \lambda_n)$ die zu dem Eigenwert λ_n gehörige Lösung von (6.6) und $F_a = F[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}]$, $F_b = F[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}]$. Dann wird die λ-Gleichung

$$n\pi + F_b - F_a = \int_a^b \left(\sqrt{Q} + \frac{Q'}{4Q} \sin 2P\right) dx \tag{7.2}$$

durch $\lambda = \lambda_n$ erfüllt. Somit gilt für jede natürliche Zahl n

$$\left|\pi + \frac{1}{n}(F_b - F_a) - \frac{1}{n}\int_a^b \sqrt{Q}\, dx\right| < \frac{1}{n}\int_a^b \frac{|Q'|}{4Q}\, dx, \qquad \lambda = \lambda_n,$$

oder nach Division durch $\frac{1}{n}\int_a^b \sqrt{Q}\, dx$

$$\left|\frac{\pi + \frac{1}{n}(F_b - F_a)}{\frac{1}{n}\int_a^b \sqrt{Q}\, dx} - 1\right| < \int_a^b \frac{|Q'|}{4Q}\, dx : \int_a^b \sqrt{Q}\, dx. \tag{7.3}$$

Läßt man n über alle Grenzen gehen, dann strebt die linke Seite von (7.2) gegen $+\infty$, denn F_a und F_b bleiben für jedes $\lambda > \Lambda$ nach § 3 beschränkt. Für die monoton wachsende Zahlenfolge der λ_n kann aber nur $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ gelten, andernfalls wäre die rechte Seite von (7.2) beschränkt. Nach Voraussetzung geht somit die rechte Seite von (7.3 mit wachsendem n gegen Null, und außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F_b - F_b) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkungen. Unter den Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt{Q(x,\lambda_n)}\, dx = +\infty.$$

Der Bedingung (7.1) wird schon Genüge geleistet, wenn $\int_a^b \frac{|Q'|}{Q}\, dx$ für $\lambda > \Lambda$ beschränkt ist, oder der Grenzwert

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \frac{|Q'|}{Q}\, dx$$

existiert. Für eine spezielle Klasse von Funktionen $Q(x, \lambda)$ ist die letzte Bedingung immer erfüllt. Es sind dies die in λ ganzen rationalen Funktionen

$$Q(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i q_i(x),$$

bei denen im Grundintervall $q_k(x) > 0$ ist und die $q_i'(x)$ stetig sind. Da bei diesen Funktionen

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \frac{|Q'|}{Q}\, dx = \int_a^b \frac{|q_k'|}{q_k}\, dx,$$

gilt für sie die asymptotische Formel

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt{\lambda_n})^k}{n} = \pi : \int_a^b \sqrt{q_k(x)}\, dx.$$

§ 8.

Schrittweise Verbesserung der Eigenwertschranken.

Wie aus den Betrachtungen der beiden letzten Paragraphen hervorgeht, sind die DGln. (6.6) und (6.11) besonders gut zur Lösung der Sturmschen Randwertaufgabe geeignet. Im folgenden wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser Gleichungen die in den Sätzen 7 und 8 aufgestellten Näherungswerte und Schranken schrittweise verbessern und so eine Einschachtelung der Eigenwerte gewinnen kann.

Das Verfahren möge zunächst an Hand der DGl. (6.6) dargelegt werden, die nach den in § 7 gemachten Voraussetzungen eine und nur eine Lösung besitzt, deren Eigenschaften dort näher gekennzeichnet wurden. Um die in Satz 7 aufgestellten Schranken und Näherungswerte zu verbessern, kann man sich der Lösung von (6.6) durch Iteration nach Picard nähern. Schreibt man (6.6) kurz $P' = A + B \sin 2P$, und geht man bei der Iteration von der Ausgangsfunktion

$$P_0(x, \lambda) = P_a + \int_a^x A\, d\xi$$

aus, so führt der erste Schritt auf

$$P_1(x, \lambda) = P_0 + \int_a^x B \sin 2 P_0\, d\xi.$$

$P_1(x, \lambda)$ stellt eine verbesserte Näherungslösung von (6.6) dar, und hängt stetig von λ ab. Dementsprechend sind die Wurzeln der λ-Gleichung

$$n\pi + F_b - F_a = \int_a^b A\, dx + \int_a^b B \sin 2 P_0\, dx, \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{8.1}$$

verbesserte Näherungswerte der Eigenwerte. Diese Wurzeln liegen immer zwischen den Schranken des Satzes 7.

Zur Bestimmung neuer Schranken sucht man je eine Ober- und Unterfunktion von (6.6) auf, welche die Näherung $P_1(x, \lambda)$ einschließen. Hierzu setzt man (6.6) in die Form

$$P' = A + B \sin 2 P_0 + B (\sin 2 P - \sin 2 P_0).$$

Da

$$|P-P_0| \leqq \int_a^x |B|\, d\xi,$$

und somit

$$|B(\sin 2P - \sin 2P_0)| \leqq 2\,|B|\,|P-P_0| \leqq 2\,|B| \int_a^x |B|\, d\xi,$$

stellen die Lösungen der DGln.

$$P' = A + B \sin 2P_0 \pm 2\,|B(x)| \int_a^x |B(\xi)|\, d\xi$$

eine Ober- und eine Unterfunktion $\overline{P}_1$ und $\underline{P}_1$ von (6.6) dar. $\overline{P}_1(b,\lambda)$ und $\underline{P}_1(b,\lambda)$ hängen stetig von λ ab, und die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F_b - F_a = \int_a^b A\, dx + \int_a^b B \sin 2P_0\, dx \pm \left(\int_a^b |B|\, dx\right)^2$$

sind somit untere und obere Schranken der Eigenwerte. Da

$$\underline{P}_1(b,\lambda) < P_1(b,\lambda) < \overline{P}_1(b,\lambda),$$

liegen die Wurzeln der λ-Gleichung (8.1) zwischen diesen Schranken.

Das eben beschriebene Verfahren zur Konstruktion verbesserter Näherungswerte und dazugehöriger Schranken liefert beim ersten Schritt nur dann verbesserte Schranken, wenn $\int_a^b |B|\, dx < 1$ ist. Es läßt sich aber, auch wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, unbegrenzt fortsetzen und führt dann zu einer Einschachtelung der Eigenwerte. Setzt man nämlich das Picardsche Iterationsverfahren fort, so hat man allgemein

$$P_{k+1} = F_a + \int_a^x A\, d\xi + \int_a^x B \sin 2P_k\, d\xi, \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Zur Konstruktion einer geeigneten Folge von Ober- und Unterfunktionen der DGl. (6.6) setzt man diese in die Form

$$P' = A + B \sin 2P_k + B(\sin 2P - \sin 2P_k),$$

und entnimmt dieser, daß die DGln.

$$P' = A + B \sin 2P_k \pm 2\,|B|\,|P-P_k|$$

jeweils eine Ober- und Unterfunktion von (6.6) liefern. Dies ist erst recht der Fall, wenn man $|P-P_k|$ durch eine obere Schranke von $|P-P_k|$ ersetzt. Da

$$|P-P_k| \leqq 2 \int_a^x |B|\,|P-P_{k-1}|\, d\xi,$$

sind die durch

$$N_k = 2 \int_a^x |B|\, N_{k-1}\, d\xi \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{8.2}$$

mit $N_0 = \int_a^x |B|\, d\xi$ erklärten N_k obere Schranken der $|P-P_k|$. Aus

dieser Erklärung folgt

$$N_k = \frac{(2N_0)^{k+1}}{2(k+1)!}, \qquad (k = 0, 1, \ldots). \tag{8.3}$$

Dies bestätigt man durch vollständige Induktion, denn aus der Annahme, daß (8.3) richtig ist, ergibt sich auf Grund von (8.2)

$$N_{k+1} = \int_a^x 2N_0' \frac{(2N_0)^{k+1}}{2(k+1)!}\, d\xi = \frac{(2N_0)^{k+2}}{2(k+2)!}.$$

Somit sind die an der Stelle $x = a$ den Wert F_a annehmenden Lösungen $\overline{P}_{k+1}(x, \lambda)$ und $\underline{P}_{k+1}(x, \lambda)$ der Gleichungen

$$P' = A + B \sin 2P_k \pm \frac{|B|}{(k+1)!}\left(\int_a^x 2|B|\, d\xi\right)^{k+1} \tag{8.4}$$

je eine Ober- und Unterfunktion von (6.6).

Die Folge der Oberfunktionen $\overline{P}_{k+1}(x, \lambda)$ geht bei festem λ gleichmäßig im Grundintervall gegen die Lösung $P(x, \lambda)$ von (6.6). In der Tat, da $\overline{P}_{k+1}$ der DGl.

$$\overline{P}_{k+1}' = A + B \sin 2P + \varrho_k$$

mit

$$\varrho_k = B(\sin 2P_k - \sin 2P) + \frac{|B|}{(k+1)!}\left(\int_a^x 2|B|\, d\xi\right)^{k+1} \geqq 0$$

genügt und nach dem Picardschen Existenzbeweis die $P_k(x, \lambda)$ bei festem λ gleichmäßig im Grundintervall mit wachsendem k gegen die Lösung $P(x, \lambda)$ gehen, streben die $\varrho_k(x, \lambda)$ gleichmäßig im Grundintervall gegen Null. Das mit $\overline{P}_{k+1}$ gebildete Defizit von (6.6) ist aber

$$B(\sin 2P - \sin 2\overline{P}_{k+1}) + \varrho_k$$

und geht somit wegen $\overline{P}_{k+1}' - P' = \varrho_k$ ebenfalls gleichmäßig gegen Null. Daraus folgt nach [Q], S. 327—329 die eben ausgesprochene Behauptung. Entsprechend zeigt man, daß die Folge der Unterfunktionen $\underline{P}_{k+1}(x, \lambda)$ mit wachsendem k gleichmäßig gegen die Lösung $P(x, \lambda)$ geht. Da die $\underline{P}_k(b, \lambda)$, $P_k(b, \lambda)$ und $\overline{P}_k(b, \lambda)$ stetig von λ abhängen, und nach Konstruktion $\underline{P}_k(b, \lambda) < P_k(b, \lambda) < \overline{P}_k(b, \lambda)$, ergibt sich in Verbindung mit dem Oszillationssatz der folgende

Satz 10. *Sind die Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt und bildet man die Picardsche Funktionenfolge $P_k(x, \lambda)$ der DGl.*

$$P' = A + B \sin 2P, \quad \left(A = \sqrt{Q},\ B = \frac{Q'}{4Q}\right),$$

indem man von der Näherungslösung

$$P_0 = F\left[u_a, \sqrt{Q(a, \lambda)}\right] + \int_a^x A\, d\xi$$

ausgeht, so sind die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F\left[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^b A\,dx + \int_a^b B \sin 2P_k\,dx \pm$$

$$\pm \frac{1}{2(k+2)!}\left(\int_a^b 2|B|\,dx\right)^{k+2}, \qquad (k = 0, 1, \ldots), \ (n = 0, 1, \ldots)$$

untere und obere Schranken der Eigenwerte, und die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F\left[u_b, \sqrt{Q(b,\lambda)}\right] - F\left[u_a, \sqrt{Q(a,\lambda)}\right] = \int_a^b A\,dx + \int_a^b B \sin 2P_k\,dx$$

$$(k = 0, 1, \ldots), \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

zwischen diesen Schranken liegende Näherungswerte der Eigenwerte. Bei festem n nähern sich die oberen und unteren Schranken mit wachsendem k von oben und unten her unbegrenzt dem Eigenwert λ_n.

Beispiel 9. Bei der in Beispiel 7 behandelten Randwertaufgabe sollen die dort für den ersten Eigenwert gefundenen Schranken nach dem in Satz 10 beschriebenen Verfahren verbessert werden. Mit

$$A = \sqrt{\lambda}\sqrt{1+x}, \quad B = \frac{1}{4(1+x)}, \quad P_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\left[(1+x)^{3/2} - 1\right]$$

ergibt sich nach dem ersten Schritt

$$(n+1)\pi = \frac{2}{3}\sqrt{\lambda}\,(\sqrt{8} - 1) + \int_0^1 \frac{\sin 2P_0}{4(1+x)}\,dx \pm \left(\frac{\ln 2}{4}\right)^2,$$

$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Das rechter Hand auftretende Integral läßt sich, indem man $z = 2P_0 + \frac{4}{3}\sqrt{\lambda}$ als neue Integrationsveränderliche einführt, durch die Funktionen des Integralsinus und des Integralcosinus ausdrücken,

$$\int_0^1 \frac{\sin 2P_0}{4(1+x)}\,dx = \frac{\cos\frac{4}{3}\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{\lambda}}\left[Si\left(\frac{4\sqrt{8}}{3}\sqrt{\lambda}\right) - Si\left(\frac{4}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right] -$$

$$- \frac{\sin\frac{4}{3}\sqrt{\lambda}}{6\sqrt{\lambda}}\left[Ci\left(\frac{4\sqrt{8}}{3}\sqrt{\lambda}\right) - Ci\left(\frac{4}{3}\sqrt{\lambda}\right)\right].$$

Aus der damit gewonnenen λ-Gleichung erhält man die folgenden verbesserten Schranken sowie einen verbesserten Näherungswert [11]) für den ersten Eigenwert λ_0:

$$l_0 = 6{,}47, \quad \nu_0 = 6{,}60, \quad L_0 = 6{,}73.$$

Dem eben ausgesprochenen Satz läßt sich im Anschluß an Satz 8 sofort ein entsprechender über die DGl. (6. 11) zur Seite stellen. Setzt

[11]) Nach L. Collatz, a. a. O., S. 317 ist $\lambda_0 = 6{,}54840$.

man (6.11) in die Form

$$P' = A + B\cos 2P, \quad \left(A = \frac{\mu + Q}{2\sqrt{\lambda}}, \quad B = \frac{\mu - Q}{2\sqrt{\mu}}\right),$$

so erkennt man, daß sich der Beweis des vorigen Satzes Schritt für Schritt auf die letzte DGl. übertragen läßt. Dabei gelangt man auf den folgenden

Satz 11. *Sind die Voraussetzungen von Satz 8 erfüllt und bildet man die* Picardsche *Funktionenfolge $P_k(x, \lambda)$ der DGl.*

$$P' = A + B\cos 2P, \quad \left(A = \frac{\mu + Q}{2\sqrt{\mu}}, \quad B = \frac{\mu - Q}{2\sqrt{\mu}}\right),$$

indem man von der Näherungslösung

$$P_0 = F(u_a, \sqrt{\mu}) + \int_a^x A\, d\xi$$

ausgeht, so sind die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \int_a^b A\, dx + \int_a^b B\cos 2P_k\, dx \pm$$

$$\pm \frac{1}{2(k+2)!}\left(\int_a^b 2|B|\, dx\right)^{k+2} \qquad (k = 0, 1, \ldots), \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

untere und obere Schranken der Eigenwerte, und die Wurzeln der λ-Gleichungen

$$n\pi + F(u_b, \sqrt{\mu}) - F(u_a, \sqrt{\mu}) = \int_a^b A\, dx + \int_a^b B\cos 2P_k\, dx,$$

$$(k = 0, 1, \ldots), \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

zwischen diesen Schranken liegende Näherungswerte der Eigenwerte. Bei festem n nähern sich die oberen und unteren Schranken mit wachsendem k von oben und von unten her unbegrenzt dem Eigenwert λ_n.

Das im letzten Satz beschriebene Verfahren gilt auch für die Prüfersche DGl. (1.4). Die entsprechenden Formeln ergeben sich aus denen des letzten Satzes, indem man dort μ durch 1 und P_k durch u_k ersetzt. Das Verfahren wird aber bei der Prüferschen DGl. im allgemeinen bedeutend langsamer konvergieren als bei den DGln. (6.6) und (6.11).

Ober- und Unterfunktionen lassen sich nicht nur in der eben beschriebenen Weise aus dem Picardschen Verfahren heraus bestimmen, sondern auch aus dem in der Arbeit [Q] beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen. Es handelt sich dabei um eine Anwendung der dort formulierten Sätze 3 und 4 bzw. 5 und 8 auf einer der DGln. (6.6) und (6.11). Diese Sätze gestatten, aus einer Oberfunktion eine verbesserte Oberfunktion oder eine Unterfunktion zu konstruieren, oder aus einer Unterfunktion eine verbesserte Unterfunktion oder eine Oberfunktion, bzw. Folgen solcher Funktionen, die gegen die Lösung

konvergieren. Im allgemeinen wird man aber das eben beschriebene mit schrittweisen Näherungen nach PICARD arbeitende Verfahren vorziehen, da es gleichzeitig obere und untere Schranken sowie einen zwischen diesen Schranken liegenden Näherungswert liefert, während sich bei Anwendung des in [Q] beschriebenen Verfahrens der schrittweisen Näherungen jeweils nur eine einzige Schranke ergibt.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß in den verschiedenen numerischen und graphischen Verfahren zur Integration von DGln. erster Ordnung ein Mittel zur Verfügung steht, um beliebig genaue Schranken und Näherungswerte der Eigenwerte zu bestimmen. Man geht dabei so vor, daß man sich zunächst (etwa nach den oben beschriebenen Methoden) eine obere Schranke L_n und eine untere l_n für den Eigenwert λ_n verschafft, den man genauer ermitteln will. Sodann bestimmt man, beispielsweise für die DGl. (1.4), numerisch oder graphisch [12]) deren an der Stelle $x = a$ den Wert u_a annehmende Lösung, einmal, nachdem man auf der rechten Seite von (1.4) λ durch L_n, das andere Mal, nachdem man λ durch l_n ersetzt hat. Die näherungsweise Integration liefert dann Näherungswerte von $u(b, l_n)$ und $u(b, L_n)$. Da $l_n < \lambda_n < L_n$, ist

$$u(b, l_n) < u_b + n\pi < u(b, L_n).$$

Liegen l_n und L_n hinreichend nahe beieinander, so gelangt man durch Interpolation zu einem Näherungswert ν_n, der eine für die meisten praktischen Zwecke ausreichende Genauigkeit besitzt,

$$\nu_n = l_n + (L_n - l_n)\,\frac{u_b + n\pi - u(b, l_n)}{u(b, L_n) - u(b, l_n)}.$$

Reicht die dabei erhaltene Genauigkeit noch nicht aus, so kann man das Verfahren mit zwei näher beieinanderliegenden Schranken wiederholen.

Im allgemeinen wird man die DGln. (6.6) und (6.11) der DGl. (1.4) vorziehen und das eben beschriebene Verfahren auf die ersteren anwenden, da bei diesen die rechte Seite für gewöhnlich eine kleinere LIPSCHITZ-Konstante besitzt. Bei großem n empfiehlt es sich, an Stelle von (6.6) oder (6.11) die DGl. (6.7) zu benutzen, da deren Lösung der Ungleichung

$$|p| \leqq \int_a^x \frac{|Q'|}{4\,Q}\,d\xi$$

genügt, und daher auch bei großem n in den meisten Fällen keine zu großen Werte annehmen wird.

---

[12]) Über numerische und graphische Integrationsverfahren vgl. z. B. E. KAMKE, Differentialgleichungen I, Leipzig 1942, S. 140.

(Eingegangen am 16. November 1943.)

Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden.

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

Ich will hier zeigen, daß der „kleine Isomorphiesatz“ $a/(a \cap b) \sim (a \cup b)/b$, der bekanntlich für die modularen Verbände charakteristisch ist [1]), aus einem allgemeineren Isomorphiesatz hervorgeht, der sich auf zwei beliebige Elemente eines allgemeinen Verbandes bezieht und nach Einführung zweckmäßiger Bezeichnungen fast ebenso, nämlich $a/(a \wedge b) \sim (a \vee b)/b$ geschrieben werden kann. Dazu brauche ich zwei neue Begriffe, die Begriffe „Teilbund“ und „isomorphe Mengen“.

2. Die Teilbünde eines Verbandes.

Unter einem Teilbund [2]) des Verbandes V verstehe ich eine Teilmenge von V, die hinsichtlich der Subsumptionsbeziehung $x =\!\!(y$ von V einen Verband bildet. Ist T ein Teilbund von V, dann gibt es zu einem $x \in T$ und $y \in T$ innerhalb T immer ein k. g. V. $x \underset{\cdot}{\cup} y$ und einen g. g. T. $x \underset{\cdot}{\cap} y$. Diese genügen offenbar

$$(1) \qquad x \underset{\cdot}{\cup} y =\!\!) x \cup y \text{ und } x \underset{\cdot}{\cap} y =\!\!(x \cap y.$$

Bestehen diese Subsumptionen für beliebige $x \in T$ und $y \in T$ als Gleichungen, genau dann ist T ein Teilverband von V. Daß nicht jeder Teilbund ein Teilverband ist, zeigt der in Fig. 1 dargestellte Verband V. Streicht man in ihm nämlich das Element $p' \cap q'$, so bleibt ein (distributiver) Teilbund T, der gewiß kein Teilverband von V ist, weil $p' \underset{\cdot}{\cap} q' = p \cup q \neq p' \cap q'$ ist. Hiernach ist der Begriff „Teilbund“ eine Verallgemeinerung des Begriffes „Teilverband“. Auch wenn der Teilbund T kein Teilverband von V ist, kann es doch vorkommen, daß z. B. mit $a \in T$, $b \in T$ und $c \in T$ auch $a \cup b \cup c \in T$ besteht. In diesem Falle ist $a \underset{\cdot}{\cup} b \underset{\cdot}{\cup} c = a \cup b \cup c$. Und dual.

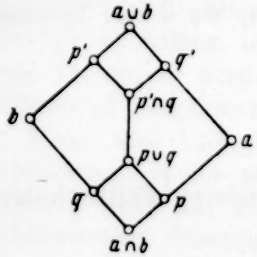


Fig. 1.

[1]) Vgl. H. Hermes und G. Köthe, Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wiss. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

[2]) Den Ausdruck „Teilbund“ verdanke ich einem Vorschlag von Herrn G. Köthe.

3. Isomorphe Mengen.

Der Isomorphiebegriff läßt sich in der Theorie der Verbände insofern viel allgemeiner als in der Gruppentheorie verwenden, als er sich auch auf Mengen von Verbandelementen anwenden läßt. Wir erklären: Zwei Mengen M und M' von Elementen eines Verbandes V sollen isomorph heißen, wenn es eine solche umkehrbar eindeutige Abbildung der Elemente $x, y \ldots$ von M auf die Elemente $x', y' \ldots$ von M' gibt, daß aus $x =(= y$ immer $x' =(= y'$ folgt und umgekehrt aus $x' =(= y'$ immer $x =(= y$. Sind M und M' isomorphe Teilmengen von V, dann gilt: Besitzen zwei Elemente x und y von M in M einen g. g. T. bzw. k. g. V. z, dann besitzen auch die entsprechenden Elemente x' und y' von M' in M' einen g. g. T. bzw. ein k. g. V. z' und zwar ist z' das z in M' entsprechende Element. Ist also M ein Teilbund von V, dann ist auch M' einer und zwar ein isomorpher. Besitzen ferner irgend zwei Elemente von M in M einen g. g. T., während irgend zwei von M' in M' ein k. g. V. besitzen, dann sind M und M' isomorphe Teilbünde von V.

4. Weitere Hilfsbegriffe.

4.1. Wir wollen dem gegebenen Verbande V nötigenfalls ein oberstes und unterstes Element 0 bzw. 1 adjungieren[3]). Ein durch ein oberstes und unterstes Element abgeschlossener Verband soll ein Reich heißen. Insbesondere heißt im Falle $a =(= b$ der Teilverband der zwischen a und b gelegenen Elemente das Zwischenreich b/a. Die Elemente a und b heißen seine Örter und zwar a der progressive oder die Quelle, b der regressive oder die Senke des Zwischenreichs.

4.2. Die Verknüpfungsweisen $x \cup y$ und $x \cap y$ will ich unter Verwendung zweier von H. Grassmann in anderem, aber verwandtem Zusammenhang gebrauchter Ausdrücke die „progressive bzw. regressive Multiplikation“ des Verbandes nennen und die Eigenschaftswörter „progressiv“ und „regressiv“ auch weiterhin zur Unterscheidung dualer Begriffe benutzen, die dann mit demselben Hauptwort bezeichnet werden dürfen. So ist z. B. $a/1$ ein progressives Hauptideal, $0/a$ ein regressives.

4.3. Und so nenne ich, wenn a und b gegebene Elemente sind, die Zerlegung

(2a) $\qquad z = x \cup y$ mit $x =(= a$ und $y =(= b$

bzw.

(2b) $\qquad z = x \cap y$ mit $x =)= a$ und $y =)= b$

[3]) Wenn man, wie es leider üblich geworden ist, das oberste Element eines Verbandes sein Eins-Element, das unterste sein Null-Element nennt, dann stellt im Verbande der natürlichen Zahlen, zu denen wir auch die 0 rechnen wollen, die 0 das „Einselement“ und die 1 das „Nullelement“ dar.

eine progressive bzw. regressive Zerlegung von z nach a und b. Aus (2a) folgt $x = a \cap z$ und $y = b \cap z$ und somit $z = (a \cap z) \cup (b \cap z)$. Und da auch die konverse Beziehung besteht, so ergibt sich aus (2a) bzw. (2b)

(3a) $$z = (a \cap z) \cup (b \cap z)$$

bzw.

(3b) $$z = (a \cup z) \cap (b \cup z).$$

Ist also z progressiv nach a und b zerlegbar, dann besteht insbesondere die Zerlegung (3a), die z in seine „größten progressiven Komponenten nach a und b" zerlegt. Ist z nur auf eine Art progressiv nach a und b zerlegbar, dann stellt (3a) diese Zerlegung dar. Jedenfalls ist (3a) die charakteristische Bedingung der progressiven Zerlegbarkeit von z nach a und b. Und dual.

4.4. Die Teiler von a sind progressiv nach a und b zerlegbar, aber, wie bereits der nicht-modulare Verband 5. Ordnung (Fig. 2) zeigt, i. A. nicht regressiv. Dual sind die Vielfachen von b regressiv nach a und b zerlegbar, aber i. A. nicht progressiv. Wir erklären: Die Menge der regressiv nach a und b zerlegbaren Teiler von a soll mit $a/(a \wedge b)$ bezeichnet werden, die Menge der progressiv nach a und b zerlegbaren Vielfachen von b mit $(a \vee b)/b$. Nennen wir das Element z nach a und b zerlegbar, wenn es sowohl progressiv wie regressiv nach a und b zerlegbar ist, dann können wir $a/(a \wedge b)$ und $(a \vee b)/b$ noch einfacher als die Mengen der nach a und b zerlegbaren Teiler von a bzw. Vielfachen von b erklären. Aus (3) folgt, daß $a/(a \wedge b)$ und $(a \vee b)/b$ Teilmengen der Zwischenreiche $a/(a \cap b)$ bzw. $(a \cup b)/b$ sind, die insbesondere deren Örter enthalten.

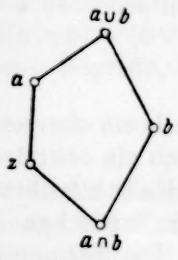


Fig. 2.

5. Perspektivitäten.

5.1. Zu zwei gegebenen Elementen a und b eines Verbandes V gibt es in V immer Elementepaare (x, y), die

(4) $$x = a \cap y \text{ und } y = b \cup x$$

genügen. Denn z. B. $(a, a \cup b)$ ist ein solches Paar. Im Anschluß an den Sprachgebrauch der projektiven Geometrie nennen wir die zur Gesamtheit der Lösungen (x, y) des Gleichungspaares (4) gehörende Zuordnung $x \rightleftarrows y$ eine Perspektivität[4]).

[4]) Streng genommen haben wir zwischen zwei Perspektivitäten zu unterscheiden, der progressiven $x \to y$ und der regressiven $y \to x$. Nicht aber die Transformation $y = b \cup x$ ist eine progressive Perspektivität, sondern nur jedes durch eine Transformation $x = a \cap y$ umkehrbare Stück von ihr. Und dual. Da also beide Transformationen gleichzeitig auftreten, so ist es bequem, von der Perspektivität $x \rightleftarrows y$ zu sprechen.

Da die Mengen X und Y der (4) genügenden Elemente x bzw. y durch die Transformationen (4) umkehrbar eindeutig und hinsichtlich der Subsumptionsbeziehung des Verbandes ordentlich auf einander abgebildet werden, so sind sie isomorph. Demnach ist eine Perspektivität eine Mengenisomorphie $X \sim Y$.

Da X aus den $x = a \cap (b \cup x)$ genügenden Elementen, d. h. den regressiv nach a und b zerlegbaren Teilern von a besteht, Y aus den $y = b \cup (a \cap y)$ genügenden, d. h. den progressiv nach a und b zerlegbaren Vielfachen von b, so hat man $X = a/(a \wedge b)$, $Y = (a \vee b)/b$ und im ganzen:

Satz 1. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes gilt: Die Menge der nach a und b zerlegbaren Teiler von a ist der Menge der nach a und b zerlegbaren Vielfachen von b isomorph:

$$\frac{a}{a \wedge b} \sim \frac{a \vee b}{b}. \tag{5}$$

Einander isomorph sind diese Mengen insbesondere durch die Perspektivität

$$x = a \cap y, \quad y = b \cup x. \tag{6}$$

5.2. Mit x_1 und x_2 ist auch $x_1 \cap x_2$ ein regressiv nach a und b zerlegbarer Teiler von a, mit y_1 und y_2 auch $y_1 \cup y_2$ ein progressiv nach a und b zerlegbares Vielfache von b. Da also die Menge $a/(a \wedge b)$ zu irgend zwei ihrer Elemente einen g. g. T. besitzt, die Menge $(a \vee b)/b$ ein k. g. V., so sind diese Mengen nach der Schlußbemerkung von 3. tatsächlich Teilbünde.

Von diesen beiden Teilbünden multipliziert also der erste regressiv, der zweite progressiv so wie der Gesamtverband V. Das progressive Produkt zweier Elemente x_1 und x_2 des ersten ergibt sich auf dem Umwege über die Isomorphie zu $a \cap (b \cup x_1 \cup x_2)$ Für das regressive zweier Elemente y_1 und y_2 des zweiten erhält man ganz entsprechend $b \cup (a \cap y_1 \cap y_2)$.

Satz 2. Eine Perspektivität ist eine Teilbundisomorphie. Der Teilbund $a/(a \wedge b)$ multipliziert regressiv, der Teilbund $(a \vee b)/b$ progressiv so wie der Gesamtverband. Daher multipliziert der erste progressiv nach der Methode $a \cap (b \cup x_1 \cup x_2)$, während der zweite regressiv nach der Methode $b \cup (a \cap y_1 \cap y_2)$ multipliziert.

6. Die Teilbünde als Bilder des Verbandes.

6.1. Wünscht man die Teilbünde $a/(a \wedge b)$ und $(a \vee b)/b$ als Bilder des Verbandes V aufzufassen, so geht man am besten von folgendem Satze aus:

Hilfssatz 1. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes gilt: Die sechs Transformationen

$$z^a = a \cap z \tag{7a}$$

(7 b) $z^b = b \cup z$

(8 a) $z^{ab} = b \cup (a \cap z)$

(8 b) $z^{ba} = a \cap (b \cup z)$

(9 a) $z^{aba} = a \cap (b \cup (a \cap z))$

(9 b) $z^{bab} = b \cap (a \cap (b \cup z))$

bilden eine Halbgruppe von lauter Idempotenten.

Beweis. Die Idempotenz der Transformationen (7) liegt auf der Hand. Diejenige der Transformationen (8 a) ergibt sich daraus, daß z^{ab} als ein progressiv nach b und a zerlegbares Vielfache von b insbesondere die Zerlegung $z^{ab} = (b \cap z^{ab}) \cup (a \cap z^{ab}) = b \cup (a \cap z^{ab})$ gestattet, die von (8 b) dual. Wir haben also:

(10) $z^{aa} = z^a, \quad z^{bb} = z^b$

(11) $z^{abab} = z^{ab}, \quad z^{baba} = z^{ba}.$

Hieraus folgt auch die Idempotenz der Transformationen (9). Da die Zusammensetzung der Transformationen durch Aneinanderreihen der „Exponenten" und Reduktion ihrer Anzahl nach den Regeln (10) und (11) erfolgt, so ergibt sie stets eine der angegebenen Transformationen. Daß diese i. A. verschieden sind, kann man an dem Verbande der Fig. 3 nachweisen. Da die Zusammensetzung eindeutig ausführbar und assoziativ ist, so liegt eine Halbgruppe vor.

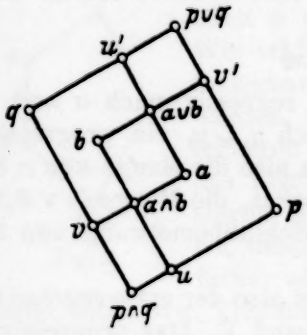


Fig. 3.

6. 2. Für die von den Transformationen entworfenen Bilder V^a, V^b, V^{ab} usw. des Verbandes V ergeben sich aus $V^a =(= V$ und $V^b =(= V$ die Subsumptionen $V^{abab} =(= V^{bab} =(= V^{ab} =(= V^b$ und $V^{baba} =(= V^{aba} =(= V^{ba} =(= V^a$. Da nach (11) $V^{abab} = V^{ab}$ und $V^{baba} = V^{ba}$ ist, so läuft dies auf

(12) $V^{ba} =(= V^a, \quad V^{ab} =(= V^b$

und

(13) $V^{aba} = V^{ba}, \quad V^{bab} = V^{ab}$

hinaus: Die zweiten Bilder des Verbandes werden von den ersten umfaßt, die dritten sind mit den zweiten identisch. Von den sechs Transformationen werden also nur vier Verbandbilder entworfen.

Wir fragen andererseits nach den Deckelementen der einzelnen Transformationen: Die Mengen der Deckelemente der Transformationen (7) und (8) haben bzw. die Gleichungen $z = a \cap z$, $z = b \cup z$, $z = b \cup (a \cap z)$ und $z = a \cap (b \cup z)$, also sind sie bzw. mit den Teilbünden $a/1$, $0/b$, $(a \vee b)/b$ und $a/(a \wedge b)$ identisch.

Die Deckelemente einer Transformation gehören zu ihren Bildelementen. Genau bei den idempotenten Transformationen ist umgekehrt

auch jedes Bildelement ein Deckelement. Da unsere Transformationen idempotent sind, so ergibt sich:

$$(14) \qquad V^a = \frac{a}{1}, \qquad V^b = \frac{0}{b}$$

$$(15) \qquad V^{ba} = \frac{a}{a \wedge b}, \quad V^{ab} = \frac{a \vee b}{b}.$$

Wir können den Sachverhalt etwa so beschreiben:

Satz 3. Indem die Transformationen $a \cap z$ und $b \cup z$ den Verband auf die Ideale $a/1$ bzw. $0/b$ abbilden, entwerfen sie in diesen insbesondere je ein Bild des anderen. Das von $a \cap z$ in $a/1$ entworfene Bild von $0/b$ ist die Menge $a/(a \wedge b)$, das von $b \cup z$ in $0/b$ entworfene Bild von $a/1$ die Menge $(a \vee b)/b$. Aus dem Gesamtverbande gehen diese zweiten Bilder also durch die Transformationen $a \cap (b \cup z)$ bzw. $b \cup (a \cap z)$ hervor.

6.3. Von den zweiten Bildern gilt nach (13), daß jedes als ganzes genommen ein Bild des anderen ist: Es wird $V^{ba} = V^{aba}$ durch $b \cup z$ in $V^{bab} = V^{ab}$ übergeführt und die zweite Menge durch $a \cap z$ wieder in die erste. Die „überschüssigen" Transformationen (9) liefern uns Parameterdarstellungen dieser Abbildungen und zwar wegen der doppelten Schreibweise der beiden Mengen für jede zwei: Wir erhalten für die erste Abbildung die Parameterdarstellungen

$$(16\,a) \qquad x = a \cap (b \cup z) \qquad y = b \cup (a \cap (b \cup z)) \quad z \in V$$

und

$$(16\,b) \qquad x = a \cap (b \cup (a \cap z)) \quad y = b \cup (a \cap z) \qquad z \in V.$$

Und genau dieselben Parameterdarstellungen erhalten wir auch für die zweite Abbildung. Da also die eine die Umkehrung der anderen ist und beide hinsichtlich der Subsumptionsbeziehung des Verbandes ordentlich sind, so sind die beiden Mengen isomorph. Weiter ergibt sich dann wie früher, daß sie Teilbünde sind.

Dieser zweite Beweis des „kleinen Isomorphiesatzes" ist zwar länger als der erste, der sofort auf das Ziel losging, lehrt aber, die Teilbünde als Bilder des Verbandes zu verstehen, und liefert eben deshalb Parameterdarstellungen der Perspektivität.

7. Perspektivität und Umreichfunktion.

7.1. Die Parameterdarstellungen (16) lassen sich vereinfachen: Da entsprechende Elemente der Perspektivität $x = y$ genügen, so können wir sie durch die Zwischenreiche y/x verbinden. Diese sollen die Zwischenreiche der Perspektivität heißen und ihre Elemente deren Zwischenelemente. Wir wollen die Menge der Zwischenelemente der Perspektivität mit Z bezeichnen.

Ist y/x ein Zwischenreich der Perspektivität (5), dann genügen x und y den Gleichungen (6). Und da auch $x = a \cap x$ und $y = b \cup y$

besteht, so folgt aus diesen für die $z \in y/x$

$$x = a \cap z, \quad y = b \cup z \qquad z \in Z. \tag{17}$$

Da also die Zwischenreiche der Perspektivität durch irgend eines ihrer Elemente bestimmt sind, so folgt aus (17) umgekehrt, daß y/x ein Zwischenreich der Perspektivität ist. Demnach ist (17) eine Parameterdarstellung der Perspektivität.

Zu einer Beschreibung der Perspektivität wird (17) aber erst, wenn wir Z unabhängig von ihr erklären können: Nun folgen, wenn wir die Elemente x und y durch $x = a \cap z$ bzw. $y = b \cup z$ erklären, aus $z \in Z$, weil (17) eine Parameterdarstellung der Perspektivität ist, für x und y die Gleichungen (6) und aus diesen für z die Gleichungen

$$a \cap (b \cup z) = a \cap z \text{ und } b \cup (a \cap z) = b \cup z \tag{18}$$

umgekehrt aus letzteren aber auch die Gleichungen (6), die aussagen, daß y/x ein Zwischenreich der Perspektivität ist, sowie $x = z = y$ und somit $z \in Z$. Hiernach ist (18) die charakteristische Bedingung für $z \in Z$.

7.2. Wenn wir die Bedingungen (18) deuten wollen, dann empfiehlt es sich, die beiden Transformationen $a \cap z$ und $b \cup z$, mit denen wir bisher arbeiteten, zu der einen Transformation

$$U(z) = \frac{b \cup z}{a \cap z} \tag{19}$$

zu verschmelzen. Nennen wir $U(z)$ das Umreich von z (für die Operatoren $a \cap$ und $b \cup$), dann gilt, daß die Umreiche dreien von den Umgebungsaxiomen genügen: 1) Jedes Element c besitzt (genau) ein Umreich $U(c)$. — 2) $c \in U(c)$. — 3) Aus $z \in U(c)$ folgt $U(z) = U(c)$.

Da von 3) auch die Umkehrung gilt, so ist $z \in U(c)$ gleichbedeutend mit $U(z) = U(c)$, d. h. $a \cap z = a \cap c$ und $b \cup z = b \cup c$. Diejenigen $z \in U(c)$, die darüber hinaus $U(z) = U(c)$ d. h.

$$a \cap z = a \cap c \text{ und } b \cup z = b \cup c \tag{20}$$

genügen, sollen die primitiven Elemente von $U(c)$ heißen.

$U(c)$ heißt ein kleinstes Umreich oder ein Kleinstwert der Umreichfunktion $U(z)$, wenn aus $U(z) = U(c)$ allemal $U(z) = U(c)$ folgt, wenn also $U(c)$ aus lauter primitiven Elementen besteht. Es werden aber alle $z \in U(c)$ den Bedingungen (20) genügen, wenn nur die Örter $b \cup c$ und $a \cap c$ von $U(c)$ ihnen genügen. Letzteres trifft genau dann zu, wenn e den Gleichungen (18) genügt. Genau an den (18) genügenden Stellen z nimmt also $U(z)$ einen Kleinstwert an.

Demnach sind die Zwischenelemente der Perspektivität (6) diejenigen Elemente, in denen die Funktion (19) einen Kleinstwert annimmt, und ihre Zwischenreiche nichts anderes als diese Kleinstwerte. Damit ist eine neue Auffassung der Perspektivitäten gegeben:

Satz 4. Die Perspektivität $a/(a \wedge b) \rightleftarrows (a \vee b)/b$ ist die Zuordnung $a \cap z \rightleftarrows b \cup z$ der Örter $a \cap z$ und $b \cup z$ der Kleinstwerte der Funktion $(b \cup z)/(a \cap z)$.

8. Insbesondere Zwischenreichperspektivitäten.

In jedem Verbande gibt es Elementepaare (a, b), zu denen Teilbünde $a/(a \wedge b)$ und $(a \vee b)/b$ gehören, die tatsächlich Zwischenreiche sind. Beispielsweise folgt aus $a \multimap b$, daß $a/(a \wedge b) = b/a = (a \vee b)/b$ ist. Allgemein gilt — vgl. die Schlußbemerkung von 4.4. — daß $a/(a \wedge b)$ und $(a \vee b)/b$ genau dann Zwischenreiche sind, wenn

(21 a) $$\frac{a}{a \wedge b} = \frac{a}{a \cap b}$$

bzw.

(21 b) $$\frac{a \vee b}{b} = \frac{a \cup b}{b}$$

besteht. Die Verbände der Figuren 4 und 5 zeigen uns, daß diese beiden Bedingungen unabhängig voneinander sind, der Verband der Fig. 6, daß perspektive Zwischenreiche durchaus nicht modular zu sein brauchen. Eine Perspektivität, die zwei Zwischenreiche aufeinander abbildet, soll eine Zwischenreichperspektivität heißen.

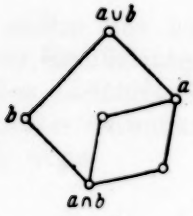


Fig. 4.

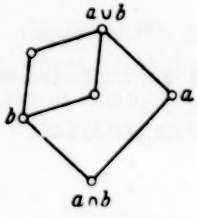


Fig. 5.

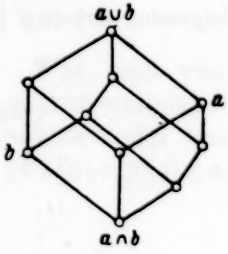


Fig. 6.

Um eine gegebene Zwischenreichisomorphie $a/(a \cap b) \sim (a \cup b)/b$ als Perspektivität nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß entsprechende Elemente x und y den Gleichungen (6) genügen. Daß umgekehrt jede Lösung (x, y) des Gleichungspaares (6) ein Paar entsprechender Elemente liefert, ist dann beweisbar: Es ergibt sich daraus, daß die Lösungen von (6) $x \in a/(a \cap b)$ und $y \in (a \cup b)/b$ genügen.

Genau in den modularen Verbänden sind alle Perspektivitäten Zwischenreichperspektivitäten.

9. Zum Modulaxiom.

Es läßt sich zeigen, daß schon eine einzige der Gleichungen (21), als Identität in a und b verstanden, das Modulaxiom ausspricht: Das Modulaxiom wird gewöhnlich so gefaßt:

(22) Aus $z \multimap a$ folgt $a \cap (b \cup z) = (a \cap b) \cup z$.

Oder dual. Es genügt aber zu fordern:

(23) Aus $a \cap b \multimap z \multimap a$ folgt $a \cap (b \cup z) = z$.

Denn aus der Voraussetzung $z=(=a$ von (22) folgt $a\cap b=(=(a\cap b)\cup z=(=a$, also nach (23) $a\cap(b\cup(a\cap b)\cup z) = (a\cap b)\cup z$, d. h. $a\cap(b\cup z) = (a\cap b)\cup z$ und das ist die Behauptung von (22). — Da von (23) auch die Umkehrung gilt, übrigens in jedem Verbande, so dürfen wir sie hinzufügen und erhalten dann als besonders bequeme Form des Modulaxiomes:

(24) $\quad a\cap(b\cup z) = z$ ist die Gleichung von $a/(a\cap b)$.

Nun wissen wir aber doch, daß $a\cap(b\cup z) = z$ die Gleichung des Teilbundes $a/(a\wedge b)$ ist. Demnach erhalten wir als kürzeste Form des Modulaxiomes die Identität $a/(a\wedge b) = a/(a\cap b)$. Und dual.

Satz 5. Das Modulaxiom fordert, daß alle Teilbünde $a/(a\wedge b)$ Zwischenreiche sind. Und dual.

Anders gesagt, spricht das Modulaxiom also aus, daß die Teiler von a, soweit sie $a\cap b$ übertreffen, nach a und b zerlegt werden können. Und dual.

Anmerkung der Redaktion. Die Arbeit wurde am 25. Dezember 1943 eingereicht, vor dem Druck jedoch umgearbeitet, um den Zusammenhang mit nachfolgenden Arbeiten zu verdeutlichen und diese vorzubereiten.

(Eingegangen am 25. Dezember 1943.)

Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen.

Von

G. G. Lorentz in Tübingen.

Einleitung.

Es sind zahlreiche Sätze bekannt über die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n der Funktionen $f(t)$ mit Periode 2π, die der LIPSCHITZschen Klasse $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ angehören, d. h. der Bedingung

$$|f(t+h) - f(t)| \leqq M|h|^\alpha \tag{1}$$

genügen. Als Beispiel sei angeführt die LEBESGUEsche Abschätzung

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)^{1}). \tag{2}$$

Wir stellen uns hier die umgekehrte Aufgabe: Was muß von den Fourier-Koeffizienten a_n, b_n einer Funktion $f(t)$ verlangt werden, damit $f(t)$ den LIPSCHITZschen Klassen $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ angehört oder von beschränkter Schwankung ist? Dabei sagen wir, daß $f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$, $0 < \alpha \leqq 1$, $p > 0$, wenn

$$\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq M|h|^\alpha.$$

Es zeigt sich, daß keine Bedingung der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^\sigma + |b_n|^\sigma) < +\infty, \qquad \sigma > 0$$

dazu ausreicht (Bemerkung zu Satz 3, § 2). Wir sind deshalb gezwungen, das asymptotische Verhalten von Ausdrücken

$$\tau_n^{(p)} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqq p \leqq +\infty,$$

insbesondere also

$$\tau_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|), \quad \tau_n^{(\infty)} = \sup_{k \geqq n} \mathrm{Max}\,(|a_k|, |b_k|)$$

zu untersuchen. Mit Hilfe dieser Mittel geben wir hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten a_n, b_n an, unter welchen man behaupten kann, daß die entsprechende Funktion zu den Klassen $\mathrm{Lip}\,\alpha$, $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ gehört oder von beschränkter Schwankung ist (Sätze 2, 2*, 3, 4). Diese

[1]) Vgl. das Buch von A. ZYGMUND, Trigonometrical series, Warschau 1935, (weiter einfach als ZYGMUND zitiert) § 2. 212.

hinreichenden Bedingungen lassen sich im gewissen Sinne nicht weiter verschärfen. Um dabei den Sätzen eine möglichst genaue Form zu geben, machen wir $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(0 < \alpha \leqq 1,\ p \geqq 1)$ zu einem linearen normierten Raum, indem wir die Addition von Elementen und die Multiplikation mit einer reellen Zahl auf natürliche Art und die Norm von $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ durch

$$\|f\| = \sup_h \frac{\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt\right\}^{\frac{1}{p}}}{|h|^\alpha} \tag{3}$$

einführen[2]). Der Raum $\mathrm{Lip}\,\alpha$ mit der Normdefinition

$$\|f\| = \sup_{h,t} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} \tag{4}$$

kann dann als Spezialfall davon, $\mathrm{Lip}(\alpha, \infty)$, betrachtet werden. Bei dieser Definition müßten wir die Funktionen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, identifizieren und die so entstehenden Klassen als Elemente des Raumes betrachten. Statt dessen wählen wir aus jeder Klasse die durch $\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt = 0$ ausgezeichnete Funktion. Für unsere Fourier-Reihen ist also stets $a_0 = 0$.

Desgleichen, wir wollen für $0 < \alpha \leqq 1$, $1 \leqq p \leqq +\infty$ Räume $M_{\alpha,p}$ bzw. $R_{\alpha,p}$ von allen reellen Zahlenfolgen $y = \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$ einführen, die der Bedingung

$$\mathfrak{M}_{\alpha,p}[y] = \sup_n \frac{\left\{\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^p + |b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}}{n^\alpha} < +\infty$$

bzw.

$$\mathfrak{R}_{\alpha,p}[y] = \sup_n \frac{\left\{\sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}}{n^{-\alpha}} < +\infty$$

genügen. Durch die in diesen Ungleichungen links stehenden Zahlen werde zugleich die Norm $\|y\|$ des Elementes y in $M_{\alpha,p}$ bzw. in $R_{\alpha,p}$ definiert. Für $p = +\infty$ verwandelt sich $M_{\alpha,p}$ in den Raum $M_{\alpha,\infty}$ der Folgen, für welche

$$\|y\| = \sup_n \frac{\sup_{k \leqq n} (\mathrm{Max}(|a_k|, |b_k|))}{n^\alpha} = \sup_n \frac{\mathrm{Max}(|a_n|, |b_n|)}{n^\alpha} < +\infty.$$

Die Elemente des Raumes $R_{\alpha,\infty}$ sind durch

$$\|y\| = \sup_n (n^\alpha \mathrm{Max}(|a_n|, |b_n|)) < +\infty$$

[2]) Man überzeugt sich leicht, daß dieser sowie alle weiter definierten Räume auch vollständig, also Räume vom Typus (B) sind (vgl. S. Banach, Operations linéaires, Warszawa 1932). Für unsere Zwecke ist jedoch dieser Umstand ohne Belang.

gekennzeichnet. Für $\alpha = 0$ fallen $M_{0,p}$ und $R_{0,p}$ mit dem klassischen Raum l_p der Zahlenfolgen y mit $\|y\| = \{\sum (|a_n|^p + |b_n|^p)\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$ zusammen. Wir bemerken noch, daß man statt n^α in der Definition der Räume $M_{\alpha,p}$, $R_{\alpha,p}$ auch eine beliebige andere positive Funktion $\psi(n)$ nehmen kann. Die dadurch entstehenden Räume werden mit $M_{\psi(n),p}$ bzw. mit $R_{\psi(n),p}$ bezeichnet.

Unter diesen Bedingungen läßt sich z. B. die Abschätzung (1) in die folgende etwas schärfere Form bringen: Durch die Fourier-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n t + b_n \sin n t)$$

wird jeder Funktion $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ eine Folge $y = \{a_1, b_1, a_2, \ldots\}$ zugeordnet. Diese Zuordnung $y = U(f)$ ist eine lineare Operation, die den Raum $\mathrm{Lip}\,\alpha$ in $R_{\alpha,\infty}$ abbildet [3]). Zum Beweise genügt es zu bemerken, daß der übliche Beweis von (1) auch folgendes liefert: Aus $|f(t+h) - f(t)| \leqq M|h|^\alpha$ folgt $|a_n| \leqq \frac{M}{n^\alpha}$, $|b_n| \leqq \frac{M}{n^\alpha}$, was offenbar besagt, daß $\|y\| = \|U(f)\| \leqq \|f\|$.

Außer den Sätzen, die von den Fourier-Koeffizienten auf die Funktion schließen, bringen wir auch Sätze in der entgegengesetzten Richtung (Sätze 1, 5). Der letzte Paragraph ist der Untersuchung von einigen speziellen Reihen (lakunäre Reihen und Reihen mit monoton abnehmenden Koeffizienten) gewidmet. Hier gelingt es sogar, einfache notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben.

§ 1.

Die Klassen $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Satz 1. a) *Für* $1 \leqq p \leqq 2$ *bildet die Fourier-Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k t + b_k \sin k t) \tag{5}$$

den Raum $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *linear in* $R_{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p},p}\left(\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ *bzw. in* $M_{\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2},p}$ $\left(\alpha < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$, *bzw. in* $M_{\log^{1/p} n,p}\left(\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ *ab.* b) *Für* $p \geqq 2$ *bildet sie* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *linear in* $R_{\alpha,p}$ *ab.* c) *Diese Behauptungen lassen sich nicht verbessern* [4]).

---

[3]) $y = U(f)$ heißt eine lineare Operation, wenn $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$ ist und wenn eine Konstante K existiert, für die $\|U(f)\| \leqq K\|f\|$ ist.

[4]) Nach einem Satz von O. Szász, Münch. Sitzungsber. 1922, S. 135—150, folgt aus $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ für $\frac{1}{p} < \alpha + \frac{1}{2}$, daß $\sum (|a_n|^p + |b_n|^p)$ konvergiert. Das ist ein Spezialfall von a).

Beweis. a) Wir betrachten die Funktion von $t, f(t+h)-f(t-h)$. Ihre Fourier-Reihe ist

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nt - a_n\sin nt)\sin nh \tag{6}$$

und die PARSEVALsche Gleichung liefert

$$4\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\sin^2 kh = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(t+h)-f(t-h)|^2\,dt \leqq \frac{1}{\pi}\|f\|^2|h|^{2\alpha},$$

$$4\sum_{k=n}^{2n-1}(a_k^2+b_k^2)\sin^2 kh \leqq \frac{1}{\pi}\|f\|^2|h|^{2\alpha}.$$

Daraus folgt für $h=\frac{\pi}{4n}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(a_k^2+b_k^2) \leqq C_1\|f\|^2\frac{1}{n^{2\alpha}},$$

wo C_1 (und weiter C_2 usw.) eine Konstante ist. Daraus folgt weiter für $1\leqq p\leqq 2$ durch Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p) \leqq \left\{\sum_{k=n}^{2n-1}(a_k^2+b_k^2)\right\}^{\frac{p}{2}}(2n)^{1-\frac{p}{2}},$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p) \leqq \frac{C_2^p\|f\|^p}{n^{p(\alpha+\frac{1}{2})-1}}. \tag{7}$$

Für $\alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \frac{C_2\|f\|}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{p\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-1}}\right)^\nu\right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{C_3\|f\|}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}}.$$

Wir haben also

$$\mathfrak{R}_{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p},p}[y] \leqq C_3\|f\|,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

Für $\alpha < \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$ folgt aus (7), wenn ν_0 durch $2^{\nu_0}\leqq n<2^{\nu_0+1}$ definiert ist,

$$\sigma_n^{(p)} = \left\{\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq C\|f\|\left\{\sum_{\nu=0}^{\nu_0}2^{\left(1-p\alpha-\frac{p}{2}\right)\nu}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq C'\|f\|2^{\left(\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2}\right)\nu_0}$$

$$\leqq C'\|f\|n^{\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2}},$$

d. h.

$$\mathfrak{M}_{\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{2},p}[y] \leqq C' \|f\|.$$

Endlich erhalten wir für $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ wie oben

$$\sigma_n^{(p)} \leqq C'' \|f\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{\nu_0} 1 \right\}^{\frac{1}{p}} = C'' \|f\| (\nu_0 + 1)^{\frac{1}{p}} \leqq C_4 \|f\| \log^{\frac{1}{p}} n,$$

womit die Behauptung a) bewiesen ist.

b) Insbesondere für $p = 2$ erhalten wir für $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ aus a)

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq C_1 \|f\| n^{-\alpha}.$$

Wenn wir die Ungleichung beachten ($p \geqq 2$)

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \{ \sup_{k \geqq n} \mathrm{Max}\,(|a_k|, |b_k|) \}^{\frac{p-2}{p}} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

bekommen wir, da $\mathfrak{R}_{\alpha,\infty}[y] \leqq C_2 \|f\|$ ist,

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq C_3 \|f\| n^{-\alpha},$$

womit auch b) bewiesen ist.

c) Es ist bekannt[5]), daß der Realteil $\varphi_\alpha(t)$ der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{i n \log n} \frac{e^{int}}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}} \tag{8}$$

eine Funktion der Klasse $\mathrm{Lip}\,\alpha$ ist. Für $1 \leqq p \leqq 2$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ gilt, wie man leicht berechnet,

$$\tau_n^{(p)} \geqq \frac{C'}{n^{\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}} \qquad (C' > 0).$$

Daraus folgt, daß die Abschätzung

$$\tau_n^{(p)} \leqq C n^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}$$

für $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ nicht verbessert werden kann. Auf ähnliche Weise werden mit Hilfe der Funktion (8) die Fälle $\alpha \leqq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ behandelt.

Um uns von der Genauigkeit der Behauptung b) zu überzeugen, machen wir davon Gebrauch, daß es Funktionen $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ gibt[6]), für welche $a_n > \frac{1}{n^\alpha}$ für unendlich viele n gilt; es ist klar, daß für sie

---

[5]) Vgl. Zygmund, § 5. 3.

[6]) Zygmund, § 2. 93.

auch die Abschätzung

$$\tau_n^{(p)}[f] \leqq C n^{-\alpha}$$

durch keine bessere ersetzt werden kann.

Satz 2. a) *Die Fourier-Reihe* (5) *bildet* $R_{\alpha,p}$ *für* $1 \leqq p \leqq +\infty$, $\frac{1}{p'} < \alpha < 1 + \frac{1}{p'}$ [7]) *linear in* $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)$ *ab.* b) *Diese Behauptung kann nicht verbessert werden.*

Beweis. a) Wir betrachten zuerst den Fall $p = 1$. Es ist dann für die Folge $y = \{a_1, b_1 \ldots, a_n, b_n, \ldots\} \in R_{\alpha,1}$

$$\tau_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqq \frac{\|y\|}{n^\alpha}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k| + |b_k|) \leqq \frac{\|y\|}{n^\alpha}, \quad \sum_{k=n}^{2n-1} k(|a_k| + |b_k|) \leqq 2\|y\| n^{1-\alpha}.$$

Wir betrachten die Differenz $f(t+h) - f(t-h)$. Nach (6) ist

$$(9) \qquad |f(t+h) - f(t-h)| \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu - 1} (|a_k| + |b_k|) k|h| +$$

$$+ 2 \sum_{k=2^\nu}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leqq 2\|y\| |h| \sum_{\nu=1}^{n} 2^{(1-\alpha)(\nu-1)} + 2\frac{\|y\|}{2^{\alpha n}} \leqq$$

$$\leqq C\|y\| 2^{(1-\alpha)n} |h| + 2\|y\| \frac{1}{2^{\alpha n}}.$$

Wir wählen jetzt n derart, daß $\frac{1}{2^n} < |h| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$. Dann erhalten wir aus der vorigen Abschätzung

$$|f(t+h) - f(t-h)| \leqq \frac{(2 + 2C)\|y\|}{2^{\alpha n}} \leqq C'\|y\| |h|^\alpha$$

für alle t und h, womit die Linearität der Abbildung von $R_{\alpha,1}$ auf $\mathrm{Lip}\,\alpha$ bewiesen ist.

Im allgemeinen Falle ist

$$\tau_n^{(p)} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{\|y\|}{n^\alpha}.$$

Es genügt zu zeigen, daß daraus

$$\tau_n^{(1)} \leqq \frac{C_1\|y\|}{n^{\alpha - \frac{1}{p'}}}$$

folgt. Wir haben für $p < +\infty$ (für $p = +\infty$ ist alles unmittelbar klar):

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leqq \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leqq \frac{\|y\|^p}{n^{\alpha p}},$$

---

[7]) p' bedeutet stets die zu p konjugierte Zahl, die durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gegeben ist.

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|+|b_k|) \leqq \left\{\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}(2n)^{\frac{1}{p'}} \leqq \frac{2^{\frac{1}{p'}}\|y\|}{n^{\alpha-\frac{1}{p'}}},$$

$$\tau_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=2^\nu n}^{2^{\nu+1}n-1}(|a_k|+|b_k|) \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{1}{p'}}\|y\|}{n^{\alpha-\frac{1}{p'}}}\left(\frac{1}{2^{\alpha-\frac{1}{p'}}}\right)^{\nu} \leqq \frac{C_1\|y\|}{n^{\alpha-\frac{1}{p'}}}.$$

Damit ist a) bewiesen.

b) Für die Funktion

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n^{\alpha+\frac{1}{p}}}$$

ist $\tau_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Wie wir in § 4 (13) sehen werden, genügt der Stetigkeitsmodul

$$\omega(f;\delta) = \max_{t,\,|h|\leqq\delta}|f(t+h)-f(t)|$$

der Funktion $f(t)$ der Ungleichung

$$\omega(f;\delta) \geqq C\delta^{\alpha+\frac{1}{p}-1} = C\delta^{\alpha-\frac{1}{p'}}.$$

Die Funktion $f(t)$ gehört also „genau“ der Klasse $\mathrm{Lip}\left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)$ an. a) kann nicht verbessert werden.

Als Spezialfälle des Satzes erhalten wir z. B. die nicht verbesserungsfähigen Behauptungen:

Aus $\tau_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|+|b_k|) = O(n^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$ folgt $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$;

aus $a_n = O(n^{-\alpha})$, $b_n = O(n^{-\alpha})$, $1<\alpha<2$ folgt $f\in\mathrm{Lip}\,(\alpha-1)$.

Im Fall $\alpha = 1+\frac{1}{p'}$ ist der Beweis hinfällig: Wir haben hier

Satz 2*. *Für* $\tau_n^{(p)} = O(n^{-\alpha})$, $\alpha = 1+\frac{1}{p'}$ *ist*

$$\omega(f;\delta) \leqq C\|y\|\delta\log\frac{1}{\delta},$$

wo $\omega(f,\delta)$ *der Stetigkeitsmodul der Funktion* $f(t)$ *ist.*

Beweis. Wir können wieder $p=1$, $\alpha=1$ annehmen, da aus $\tau_n^{(p)} = O(n^{-\alpha})$ folgt $\tau_n^{(1)} = O\left(n^{-\alpha+\frac{1}{p'}}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, wie wir oben gesehen haben. Wie in (9) bekommen wir

$$|f(t+h)-f(t-h)| \leqq 2\sum_{\nu=1}^{n}2\|y\|\,|h| + 2\frac{\|y\|}{2^n} = 4\|y\|\,n|h| + \frac{2\|y\|}{2^n}.$$

n wird wieder so gewählt, daß $\frac{1}{2^n} < |h| \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ ist. Dann bekommen wir

$$|f(t+h)-f(t-h)| \leqq \frac{C\|y\|n}{2^n} \leqq C'|h|\log\frac{1}{|h|}.$$

Wir werden noch zeigen, daß die Abschätzung des Satzes für $p = 1$ nicht verbessert werden kann. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Funktion

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \cos 4^k t.$$

Es ist hier

$$\Delta_h = f(t+h) - f(t-h) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \sin 4^k t \sin 4^k h.$$

Wir setzen $h = \frac{1}{4^n}$, $t = \frac{2\pi}{3}$, dann ist

$$4^k t = (3+1)^k \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi},$$

$$\sin 4^k t = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

und da für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ bekanntlich $\sin x \geqq \frac{2x}{\pi}$ ist,

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \sin \frac{4^k}{4^n} \geqq \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4} \frac{4}{4^n} + \frac{1}{4^2} \frac{4^2}{4^n} + \cdots + \frac{1}{4^n} \right) -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{2}{\pi} \frac{n}{4^n} - \frac{1}{4^n} \frac{1}{3} > \frac{1}{6} \frac{n}{4^n},$$

oder $-\Delta_h > C h \log \frac{1}{h}$, $(C > 0)$. Außerdem ist $r_n^{(1)} = \sum_{4^k \geqq n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3} \frac{1}{4^{k_0}} < \frac{1}{3} n$, wo k_0 durch $4^{k_0-1} < n \leqq 4^{k_0}$ bestimmt ist. Unsere Behauptung ist bewiesen.

Bemerkung. Dieselbe Schlußweise wie in Satz 2 ergibt, daß die Fourier-Reihe $R_{\alpha,p}$ für $\alpha > 1 + \frac{1}{p'}$ linear in Lip 1 abbildet.

§ 2.

Klassen Lip (α, p). Funktionen von beschränkter Schwankung.

Die Sätze von § 1 können auch auf die Klassen Lip (α, p) übertragen werden; wir geben hier nur den folgenden Satz:

Satz 3. *Die Fourier-Reihe bildet für* $1 \leqq p \leqq 2$, $0 < \alpha < 1$ $R_{\alpha,p}$ *linear in* Lip (α, p') *ab*[8]).

Beweis. Aus $y = \{a_1, b_1, \ldots\} \in R_{\alpha,p}$ folgt $y \in l_p$, also nach dem Hausdorff-Youngschen Satz $f \in L_{p'}$. Die Fourier-Reihe der Funktion $f(t+h) - f(t-h)$ ist (6), also nach dem genannten Satz

$$\left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h) - f(t-h)|^{p'} dt \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) |\sin k h|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq C \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} |h| + C \left\{ \sum_{k=2^n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}},$$

[8]) Für eine andere (äquivalente) Bedingung für $\{a_1, b_1, \ldots\}$ vgl. O. Szász, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), S. 379 ff.

und wenn wir beachten, daß

$$\sum_{k=n}^{2n-1} k^p (|a_k|^p+|b_k|^p) \leqq (2n)^p \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p+|b_k|^p) \leqq 2^p \|y\|^p n^{p-\alpha p},$$

ergibt sich

$$\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h)-f(t-h)|^{p'}\, dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq C\|y\| \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} 2\cdot 2^{(1-\alpha)\nu}|h| + \frac{1}{2^{n\alpha}}\right\}.$$

Wie in Satz 2 folgt daraus

$$\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h)-f(t-h)|^{p'}\, dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq C'\|y\|\,|h|^{\alpha},$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Man kann zeigen, daß für die Sätze, in welchen von den Fourier Koeffizienten auf die Funktion geschlossen wird (wie in Sätzen 2, 3), eine Untersuchung des *asymptotischen Verhaltens von* $\tau_n^{(p)}$ wirklich unentbehrlich ist. Nur auf Grund der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\sigma}+|b_n|^{\sigma}), \qquad (\sigma>0) \tag{10}$$

sogar für $0<p<1$, kann man keine Aussagen über die Zugehörigkeit der Funktion f zu den Klassen $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ machen.

Für die Funktion

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k} \cos b^{k^2} t,$$

wo b eine natürliche Zahl ist, ist (10) für alle $\sigma>0$ konvergent, aber es ist $f \bar{\in} \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ für $\alpha>0$, $p>0$ und genügend großes $b: b \geqq b(p)$. In der Tat, setzen wir $h = \frac{\pi}{2\, b^{n^2}}$ und berechnen

$$\Delta_k = \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_k(t+h)-\varphi_k(t-h)|^p\, dt,$$

wo $\varphi_k(t) = \frac{1}{b^k}\cos b^{k^2} t$ gesetzt wurde, so ist

$$\Delta_k = \int_{-\pi}^{+\pi} |2\,\frac{1}{b^k} \sin b^{k^2} t \sin b^{k^2} h|^p\, dt$$

$$= \left|\frac{2}{b^k}\sin b^{k^2} h\right|^p \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin b^{k^2} t|\, dt = \frac{A}{b^{pk}} |\sin b^{k^2} h|^p$$

mit

$$A = 2^p \int_{-\pi}^{+\pi} |\sin t|^p\, dt > 0.$$

Infolgedessen ist

$$\Delta_n = \frac{A}{b^{pn}}; \qquad \Delta_k \leqq \frac{A}{b^{pk}} \qquad \text{für } k>n,$$

$$\Delta_k \leqq \frac{A}{b^{pk}} \left(\frac{\pi b^{k^2}}{2\, b^{n^2}}\right)^p \leqq C A \frac{b^{pk^2}}{b^{pn^2}} \qquad \text{für } k<n,$$

und wir bekommen (wir können offenbar $0 < p < 1$ annehmen)

$$\Delta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t+h)-f(t-h)|^p \, dt \geqq \Delta_n - \sum_{k \neq n} \Delta_k$$

$$\geqq \frac{A}{b^{pn}} - A \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{b^{pk}} - \frac{CA}{b^{pn^2}} \sum_{k=1}^{n-1} b^{pk^2}$$

$$\geqq \frac{A}{b^{pn}} - \frac{A}{b^p - 1} \frac{1}{b^{pn}} - CA \frac{b^{p(n-1)^2+1}}{b^p - 1} \frac{1}{b^{pn^2}} \geqq \frac{A}{b^{pn}} \left(1 - \frac{1+C}{b^p - 1}\right).$$

Für genügend großes b haben wir also $\Delta \geqq \frac{A}{2\, b^{pn}}$ und deshalb

$$\frac{\Delta^{\frac{1}{p}}}{h^\alpha} \geqq \frac{A'}{b^n} \left(\frac{2\, b n^2}{\pi}\right)^\alpha = A'' b^{\alpha n^2 - n} \to \infty,$$

obgleich $h \to 0$. Damit ist unsere Bemerkung gerechtfertigt.

Wir betrachten jetzt den Raum V^* der Funktionen $f(t)$ von beschränkter Schwankung, für die $\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt = 0$. Dabei identifizieren wir solche Funktionen, die sich nur in abzählbar vielen Punkten unterscheiden. Die Norm von $f \in V^*$ setzen wir gleich

$$\|f\| = \operatorname*{Var^*}_{[-\pi, +\pi]} f(t) = V^*[f],$$

wo $\operatorname{Var}^* f(t)$ die kleinste volle Schwankung der mit $f(t)$ identifizierten Funktionen bedeutet (es ist $\operatorname{Var}^* f(t) = \operatorname{Var} f^*(t)$, wo $f^*(t)$ von $f(t)$ sich nur in den Unstetigkeitspunkten von $f(t)$ unterscheidet und in diesen zwischen $f(t-0)$ und $f(t+0)$ liegt). Man kann beweisen [9]), daß V^* und $\operatorname{Lip}(1,1)$ äquivalent sind, also aus denselben Elementen bestehen und dieselbe Konvergenz haben.

Satz 4. a) *Die Fourier-Reihe bildet V^* linear in $R_{\frac{1}{p'}, p}$ ab $(1 < p \leqq +\infty)$.*

b) *Sie bildet für $1 \leqq p \leqq 2$ den Raum $R_{1,p}$ und für $2 \leqq p \leqq +\infty$ den Raum $R_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}, p}$ linear in V^* ab.* c) *Diese Behauptungen sind genau.*

Beweis. a) Für $f \in V^*$ ist $|a_n| \leqq \frac{1}{n} V^*[f]$, $|b_n| \leqq \frac{1}{n} V^*[f]$ und daraus folgt $\tau_n^{(p)} \leqq C \frac{1}{n^{\frac{1}{p'}}} V^*[f]$. Die Genauigkeit folgt aus dem Beispiel der Funktion

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

b) Nach Satz 3 wird für $1 \leqq p \leqq 2$ $R_{1,p}$ linear in $\operatorname{Lip}(1, p')$, also erst recht in $\operatorname{Lip}(1,1) = V^*$ abgebildet.

[9]) Aus den Überlegungen von Hardy und Littlewood, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 565—606 und **28** (1928), S. 612—634 folgt sogar leicht, daß

$$\operatorname{Var}^* f(t) = |f|_{\operatorname{Lip}(1,1)}.$$

Für $2 \leqq p \leqq +\infty$ folgt aus $y = \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots\} \in R_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}, p}$

$$\left\{\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|^p + |b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \tau_n^{(p)} \leqq \frac{\|y\|}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}}},$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(a_k^2 + b_k^2) \leqq \left(\frac{\|y\|}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}}}\right)^2 n^{1-\frac{2}{p}} = \frac{\|y\|^2}{n^2},$$

und

$$\tau_n^{(2)} \leqq \frac{C\|y\|}{n}.$$

Damit ist $R_{\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}, p}$ linear in $R_{1,2}$ abgebildet. Die erste Hälfte von b) liefert unsere Behauptung.

c) Die Funktion

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos b^k t \quad (0 < a < 1,\ ab > 1,\ b - \text{ganz})$$

ist von unbeschränkter Schwankung[10]) und es ist für ein n der Form $n = b^k$: $\tau_n^{(p)}[f] \geqq |a_n(f)| \geqq \frac{C}{n^\alpha}$, wo $\alpha = \frac{\log \frac{1}{a}}{\log b}$. Da α beliebig nahe an 1 sein kann, sehen wir, daß die erste Hälfte von b) für $R_{\alpha,p}(\alpha < 1)$ statt $R_{1,p}$ nicht mehr richtig ist.

Die Genauigkeit von b) für $p \geqq 2$ folgt aus dem Beispiel (8). Es ist $\varphi_\alpha \bar{\in} l^{*}$[11]) und

$$\tau_n^{(p)}[\varphi_\alpha] \leqq \frac{C'}{n^{\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{p}}}.$$

Der Exponent ist beliebig nahe an $\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}$. Wir sehen also, daß in b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{p'}$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann.

§ 3.

Räume L_r.

Hier wird der Raum L_r der mit r-ten Potenz integrierbaren Funktionen betrachtet. Wir führen folgende Bezeichnung ein. $C_{\alpha,p}$ sei die Menge derjenigen Elemente $y = \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$ von $M_{\alpha,p}$, für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left\{\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p + |b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} = 0.$$

---

[10]) Hardy, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), S. 301—325.

[11]) Das folgt z. B. aus Zygmund, Satz von § 6, 34.

$C_{a,p}$ ist eine lineare und, wie man sich leicht überzeugt, abgeschlossene Untermenge von $M_{a,p}$, also selbst ein Raum vom Typus (B).

Satz 5. a) *Die Fourier-Reihe bildet den Raum L_r der mit r-ten Potenz integrierbaren Funktionen für $1 \leqq r \leqq 2$ linear in $C_{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'},p}$ $(p<r')$ bzw. in $l_p (p \geqq r')$ ab.* b) *Für $r \geqq 2$ bildet sie L_r linear in $C_{\frac{1}{p}-\frac{1}{2},p}$ $(p<2)$ bzw. in $l_p (p \geqq 2)$ ab.* c) *Für $1 \leqq r \leqq 2$ ist unsere Behauptung genau, für $r>2$ läßt sie sich nicht wesentlich verbessern.*

Beweis. a) Für $1 \leqq r \leqq 2$ folgt aus $f \in L_s$ nach dem Satz von Hausdorff-Young

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^{r'}+|b_k|^{r'})\right\}^{\frac{1}{r'}} \leqq C \|f\|_{L_r},$$

daraus folgt für $p<r'$

$$\sigma_n^{(p)} = \left\{\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \sigma_N^{(p)}+\left\{\sum_{k=N+1}^{n} (|a_k|^p+|b_k|^p)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqq \sigma_N^{(p)}+\left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} (|a_k|^r+|b_k|^r)\right\}^{\frac{1}{r'}} (n-N)^{\left(1-\frac{p}{r'}\right)\frac{1}{p}}$$

und

$$\frac{\sigma_n^{(p)}}{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}} \leqq \frac{\sigma_N^{(p)}}{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}}+\left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} (|a_k|^r+|b_k|^r)\right\}^{\frac{1}{r'}}.$$

Wenn wir zuerst N und daraufhin n genügend groß wählen, erhalten wir

$$\sigma_n^{(p)} = o\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}\right).$$

Außerdem ist

$$\sigma_n^{(p)} \leqq \sigma_n^{(r')} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}} \leqq C\|f\| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}},$$

also unsere Abbildung linear.

Für $p \geqq r'$ ist die Behauptung eine unmittelbare Folge des Hausdorff-Youngschen Satzes.

b) Für $p<2$ wird L_s nach a) linear in $C_{\frac{1}{p}-\frac{1}{2},p}$ abgebildet, und das gilt um so mehr für $L_r (r \geqq 2)$. Die zweite Hälfte der Behauptung folgt für $p \geqq 2$ aus dem Satz von Riesz-Fischer.

c) Daß b) nicht wesentlich verbessert werden kann, folgt aus einem Beispiel von Hardy und Littlewood[12]). Die Funktion $(\varepsilon>0)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{i n \log n}}{\sqrt{n}\, \log^{1+\varepsilon} n} e^{int}$$

[12]) Zygmund, § 5. 33.

ist stetig und für sie gilt offenbar $\sigma_n^{(p)} \geqq \frac{n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{\log^{1+\varepsilon_n}}$. Was a) anbetrifft, so werden wir für jede zu Null konvergierende Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ eine Funktion $f \in L_r$ $(1 \leqq r \leqq 2)$ angeben, für die

$$\sigma_n^{(p)}[f] \neq O\left(\varepsilon_n n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}\right).$$

Zu diesem Zwecke sei $T_n(t) = \frac{K_n(t)}{\|K_n\|}$, wo

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{2} + n\cos t + \cdots + \cos nt\right) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

der Fejersche Kern ist. Wir haben dann:

$$\|K_n\| = \left\{\int_{-\pi}^{+\pi} K_n^r\, dt\right\}^{\frac{1}{r}} \leqq \left\{\operatorname{Max}_t K_n(t)\right\}^{\frac{r-1}{r}} \left\{\int_{-\pi}^{+\pi} K_n(t)\, dt\right\}^{\frac{1}{r}} \leqq C n^{\frac{1}{r'}}.$$

Die trigonometrischen Polynome $T_n(t)$ haben die Eigenschaften: Sie sind positiv: $T_n(t) \geqq 0$, sie haben positive Fourier-Koeffizienten, es ist $\|T_n\| = 1$ und schließlich gilt

$$\sigma_n^{(p)}[T_n] \geqq \frac{C'}{n^{1+\frac{1}{r'}}}\left(\sum_{k=1}^{n} k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqq C'' n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}}, \qquad (C'' > 0).$$

Wir wählen jetzt eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen $\{n_k\}$ derart, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} < +\infty$. Dann ist

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} T_{n_k}(t) \in L_r,$$

$$\sigma_{n_k}^{(p)}[f] \geqq \varepsilon_{n_k} \sigma_{n_k}^{(p)}[T_{n_k}] \geqq C'' \varepsilon_{n_k} n_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r'}},$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

§ 4.

Spezielle Reihen.

Für Fourier-Reihen spezieller Art kann sich die Lücke schließen, die im allgemeinen zwischen den notwendigen und den hinreichenden Bedingungen für $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ vorhanden ist (vgl. Sätze 1 und 2).

Satz 6. *Damit eine lakunäre trigonometrische Reihe*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_k t + b_{n_k}\sin n_k t) \qquad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geqq \lambda > 1$$

die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

In der Tat, unsere Behauptung folgt ohne weiteres aus der Abschätzung (1) und aus Satz 2, wenn man beachtet, daß in unserem Falle

$$\tau_n^{(1)} = O\Big(\sum_{n_k \geqq n} \frac{1}{n_k^{\alpha}}\Big) = O\Big(\frac{1}{n^{\alpha}}\Big).$$

Die nächsten zwei Sätze beziehen sich auf Reihen der Form

$$\text{(A)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \qquad \text{(B)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt,$$

wobei die Koeffizienten a_n monoton abnehmend gegen Null streben.

Satz 7. a) *Damit* (A) *die Fourier-Reihe einer beschränkten Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \tag{11}$$

b) *Für* (B) *lautet die entsprechende Bedingung*

$$a_n = O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{12}$$

a) folgt aus einem Satz von PALEY [13]).

b) Daß die Bedingung (12) hinreichend ist, ist bekannt [14]), es bleibt also bloß ihre Notwendigkeit zu beweisen. Ist (B) die Fourier-Reihe von $g(t)$, so haben wir

$$\int_0^x g(t)\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin^2 \frac{nx}{2}$$

und wenn $\omega(g;x)$ den Stetigkeitsmodul von $g(t)$ bedeutet:

$$\omega(g;x) = \sup_{|h| \leqq x,\, t} |g(t+h) - g(t)|,$$

$$x\,\omega(g;x) \geqq 2 \sum_{n=\left[\frac{1}{2x}\right]}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \frac{a_n}{n} \sin^2 \frac{nx}{2} \geqq C_4 \sum_{\left[\frac{1}{2x}\right]}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \frac{a_n}{n} \geqq C_5\, a_{\left[\frac{1}{x}\right]},$$

$$a_{\left[\frac{1}{x}\right]} \leqq C\,x\,\omega(g;x). \tag{13}$$

Daraus folgt ohne weiteres (12).

Satz 8. *Damit die Reihe* (A) *oder die Reihe* (B) *die Fourier-Reihe einer Funktion der Klasse* Lip α *sei, ist notwendig und hinreichend, daß* [15])

$$a_n = O\Big(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\Big). \tag{14}$$

---

[13]) R. E. A. C. PALEY, Journal London Math. Soc. **7** (1932), 205—208.

[14]) Man wende die Abschätzungen von CHAUNDY u. JOLLIFE an, Proc. Lond. Math. Soc. **15** (1916), S. 214—216, oder ZYGMUND, § 5. 11.

[15]) Man vergleiche auch HARDY, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **32** (1931), S. 441 bis 448. Dort wird $\lim (n^{1+\alpha} a_n) = A \geqq 0$ als notwendige und hinreichende Bedingung für ein gewisses Verhalten der Summen von (A) und (B) bei $x \to 0$ erkannt.

Beweis. Daß (14) hinreichend ist, folgt aus Satz 2 (§ 1). Für die Reihe (B) folgt aus (13) sofort auch die Notwendigkeit der Bedingung. Wir nehmen also an, daß (A) die Fourier-Reihe der Funktion $f(t) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ sei. Zunächst ist $\Sigma a_n < +\infty$ nach Satz 7; weiter haben wir

$$f(0) - f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos nt) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 \frac{nt}{2}$$

und wenn wir $t = \frac{1}{N}$ setzen,

$$\frac{M}{N^\alpha} \geqq 2 \sum_{n=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N} a_n \frac{n^2}{4N^2} \geqq C' N a_N,$$

$$a_N \leqq \frac{M'}{N^{1+\alpha}}.$$

(Eingegangen am 16. Dezember 1943.)

Über die absoluten Minimanten des regulären semidefiniten Variationsproblems.

Von

Wilhelm Damköhler in München.

Einleitung.

Die auf den folgenden Seiten vorgetragenen Überlegungen haben die Aufstellung eines Entscheidungskriteriums (Satz 1, bzw. Satz 6) zum Ziel, wann für ein positiv semidefinites reguläres Variationsproblem für Kurvenintegrale in der WEIERSTRASSschen Parameterform zwischen zwei Punkten x_1 und x_2 des Bereiches $\mathfrak{B}$ absolute Minimanten von endlicher bzw. nur von unendlicher Bogenlänge möglich sind. Sie lehnen sich auf's engste an die von CARATHÉODORY entdeckte ε-Funktion an[1]), die für Probleme der hier behandelten Art das naturgemäße Untersuchungsinstrument abgibt, weil sie die Definitheit des Variationsproblems zum Zwecke der Längenbeschränkung nach oben für die Vergleichskurven einer Minimalfolge nicht nötig hat.

§ 1. In einem Gebiet $\mathfrak{B}$ des Raumes der $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ und für alle Werte des Vektors $\xi = (\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$ sei die stetige und nach ihren Argumenten x und ξ zweimal stetig differenzierbare Funktion $F(x, \xi)$ gegeben. $F(x, \xi)$ sei nicht-negativ: $F(x, \xi) \geqslant 0$, und in den ξ positiv homogen erster Ordnung: $F(x, h\xi) = h \cdot F(x, \xi)$, $h > 0$. Das mit ihr gebildete Variationsproblem $\int_\gamma F(x, \dot{x})\, dt = \text{Min}$ ist dann von der Parameterdarstellung der Integrationskurve γ unabhängig, und sei positiv regulär, d. h. seine WEIERSTRASSsche E-Funktion

$$E(x, x', \dot{x}) \equiv F(x, \dot{x}) - \sum_i \dot{x}_i F_{x_i'}(x, x') \tag{1.1}$$

sei stets $\geqslant 0$ und verschwinde nur, wenn die Vektoren $\dot{x}_i$ und x_i' gleichsinnig parallel sind.

Als Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ des Variationsproblems F im Punkte $x \subset \mathfrak{B}$ bezeichnet man die diesem Punkte in einem Hilfsraum der $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ vermöge

$$\mathfrak{G}(x): \qquad y_i = F_{\dot{x}_i}(x, \xi) \tag{1.2}$$

[1]) C. CARATHÉODORY: Über die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel, Annali Reg. scuola norm. sup. Pisa, cl. sci. fis. mat., Serie II, Vol. I (1932), pg. 79—87; vgl. auch dessen Lehrbuch: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, Teubner 1935, pg. 323 ff.

zugeordnete Hyperfläche, in welcher der Vektor ξ über die Einheitskugel $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} = 1$ variiert, und für die Hyperfläche $\mathfrak{G}(x)$ die Bedeutung der nach außen gerichteten Normalen hat. Wegen der vorausgesetzten positiven Regularität des Variationsproblems $F(x, \dot{x})$ ist die Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ für jeden Punkt $x \subset \mathfrak{B}$ eine konvexe, sich nicht auf einen bloßen Punkt zusammenziehende Hyperfläche vom topologischen Typus der Kugel $|y| = 1$, die in jedem ihrer Punkte eine eindeutig bestimmte Stützebene hat, und, weil $F(x, \xi) > 0$ sein sollte, den Nullpunkt $y_i = 0$ des Hilfsraumes nicht außerhalb ihrer läßt. $E(x, \xi', \xi)$ bedeutet für die Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ den gerichteten Abstand der durch den Punkt ξ' gezogenen Parallelebene zu der Stützebene im Punkte ξ von eben dieser Stützebene selbst.

Wir betrachten die Carathéodorysche ε-Funktion; sie wird für zwei beliebige Punkte x_1 und x_2 des Gebietes $\mathfrak{B}$ durch

$$\varepsilon(x_1, x_2) = \text{untere Grenze}_{\mathfrak{c}} \int_{x_1}^{x_2} F(x, \dot{x})\, dt \tag{1.3}$$

definiert, worin zur Konkurrenz alle geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\mathfrak{c}$ zu berücksichtigen sind, welche x_1 und x_2 enthalten. Wie Carathéodory a. a. O. gezeigt hat, ist $\varepsilon(x_1, x_2)$ eine stetige Funktion ihrer beiden Argumente x_1 und x_2 mit folgenden Eigenschaften: 1. Bezeichnet $\mathfrak{N}_x$ die Menge aller jener Punkte x', welche mit x zusammen ein $\varepsilon(x, x') = 0$ ergeben, so ist $\mathfrak{N}_x$ ein den Punkt x enthaltendes Kontinuum $\mathfrak{C}$, dessen jeder einzelne Punkt x' sowohl Anfangspunkt wie auch Endpunkt eines durch ihn hindurchgehenden und ganz auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Extremalenbogens $\mathfrak{e}$ ist, der nur aus Nullrichtungen von F besteht, d. h.: in dessen sämtlichen Linienelementen $F = 0$ ist. Jeder Punkt $x' \subset \mathfrak{N}_x$ bestimmt $\mathfrak{C}$ eindeutig, d. h.: bedeutet $\mathfrak{N}_{x'}$ das gemäß obiger Definition dem Punkte x' zugeordnete Kontinuum und ist $x' \subset \mathfrak{N}_x$, so ist $\mathfrak{N}_{x'} = \mathfrak{N}_x$. 2. Ist $\mathfrak{B}'$ irgendein beschränktes Gebiet, für dessen sämtliche Punktepaare (x_1, x_2) mit $x_1 \neq x_2$ $\varepsilon(x_1, x_2) > 0$ ist, so haben alle Minimalfolgen von Kurven γ, die von dem beliebigen Punkte x_1 als Anfangspunkt zu dem ebenfalls beliebigen Punkte x_2 als Endpunkt führen, gleichmäßig beschränkte Bogenlänge, wenn man sich nur bei Betrachtung des absoluten Minimums auf die in $\mathfrak{B}'$ allein gelegenen Kurven beschränkt [2]).

Ich will in der Folge ein solches Kontinuum $\mathfrak{C}$ ein zur Funktion $\varepsilon(x_1, x_2)$ (1.3) gehöriges „Carathéodorysches Kontinuum“ nennen. Es ist klar, daß zu einem Variationsproblem F mehrere solche Carathéodorysche Kontinua gehören können.

[2]) Zum Beweise vergleiche man etwa L. Tonelli: Sull'esistenza del Minimo in Problemi di calcolo delle Variazioni (Ann. Reg. scuola norm. sup. Pisa, cl. sci. fis. mat., Serie II, Vol. I (1932), pg. 89—99) insbes. pg. 91—94.

1.

§ 2. Wir studieren zunächst den Fall, daß nur ein einziges solches Kontinuum $\mathfrak{C}$ vorhanden sei, das zudem noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liege. Es bedeute x einen beliebigen Punkt aus $\mathfrak{B}$, der auf $\mathfrak{C}$ gelegen sein kann oder auch nicht. Wir nennen

$$(2.1) \qquad f(x/\mathfrak{C}) = \underset{\gamma';\, x' \subset \mathfrak{C}}{\text{untere Grenze}} \int_{\gamma'}^{x'} F(x, \dot{x})\, dt$$

für alle von x ausgehenden rektifizierbaren Kurven γ', die in dem auf $\mathfrak{C}$ variablen Punkte x' enden. Ebenso sei

$$(2.2) \qquad g(x/\mathfrak{C}) = \underset{\gamma'';\, x'' \subset \mathfrak{C}}{\text{untere Grenze}} \int_{\gamma''}^{x''} F(x, \dot{x})\, dt$$

für alle von dem auf $\mathfrak{C}$ variierenden Punkte x'' ausgehenden und nach x führenden Wege γ''. Sind schließlich x_1, x_2 zwei beliebige Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$, so heiße

$$(2.3) \qquad \mu(x_1, x_2) = \underset{\gamma}{\text{untere Grenze}} \int_{\gamma}^{x_2} F(x, \dot{x})\, dt$$

auf der Gesamtheit aller von x_1 nach x_2 führenden Wege γ aus $\mathfrak{B}$. Weil das Carathéodorysche Kontinuum für ein semidefinites Variationsproblem die Eigenschaft hat, daß sich je zwei seiner Punkte x' und x'' in beiden Richtungen durch rektifizierbare Wege λ beliebig kleinen Integralwertes $\int_{\lambda} F(x, \dot{x})\, dt$ verbinden lassen, so haben die Definitionen (2.1), (2.2) und (2.3) die Ungleichungen

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \int_{\gamma}^{x_2} F(x, \dot{x})\, dt \geqslant \mu(x_1, x_2) \geqslant g(x_2/\mathfrak{C}) - g(x_1/\mathfrak{C}) \\ \int_{\gamma}^{x_2} F(x, \dot{x})\, dt \geqslant \mu(x_1, x_2) \geqslant f(x_1/\mathfrak{C}) - f(x_2/\mathfrak{C}) \\ \mu(x_1, x_2) \leqq f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}) \end{cases}$$

zur Folge, aus denen resultiert, daß $f(x/\mathfrak{C})$ und $g(x/\mathfrak{C})$ beide in $\mathfrak{B}$ eindeutige, stetige und im kleinen Lipschitzbeschränkte Funktionen sind. Solche Funktionen haben nun einmal nach einem bekannten Satz von Rademacher[3]) in fast allen Punkten x des räumlichen Gebietes $\mathfrak{B}$ ein totales Differential im Stoltzschen Sinne, welches sich mit Hilfe der ebenfalls in fast allen Gebietspunkten existierenden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ in der Form $\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ bzw. $\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$ schreiben läßt. Andererseits werden sie aber auch zu stetigen und Lipschitzbeschränkten

[3]) H. Rademacher: Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale,

Funktionen des Kurvenparameters t, wenn man sie längs einer beliebigen in $\mathfrak{B}$ verlaufenden rektifizierbaren Kurve γ betrachtet. Hier besitzen sie dann in fast allen Kurvenpunkten von γ einen längs γ genommenen Differentialquotienten $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$; und dieser Differentialquotient läßt sich mittels des vorhin erwähnten totalen Differentials immer dann in der Form $\frac{df}{dt} = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{dg}{dt} = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial x_i}$ darstellen, wenn der fragliche Kurvenpunkt von γ zufällig gerade mit einem Punkte $x \subset \mathfrak{B}$ zusammenfällt, in dem das totale Differential nach dem oben herangezogenen RADEMACHERschen Satz existiert. Darum lassen sich die beiden ersten Ungleichungen (2.4) auch in der Form

$$(2.5)\quad \begin{cases} \int\limits_{\gamma}^{x_2} \left[F(x,\dot{x}) - \frac{dg}{dt}\right] dt = \int\limits_{\gamma}^{x_2} \left[F(x,\dot{x}) - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\right] dt \geqslant 0 \\ \int\limits_{\gamma}^{x_2} \left[F(x,\dot{x}) + \frac{df}{dt}\right] dt = \int\limits_{\gamma}^{x_2} \left[F(x,\dot{x}) + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] dt \geqslant 0 \end{cases}$$

schreiben, wobei die ganz links stehenden Integrale stets gebildet werden können, die rechts stehenden dagegen nur dann, wenn für sie die Aussagen des RADEMACHERschen Satzes zutreffen, und Gleichheit zwischen den beiden Integralen nur für den Fall besteht, daß dieser RADEMACHERsche Satz in fast allen Punkten der Integrationskurve γ erfüllt ist.

§ 3. Wir wollen jetzt zeigen, daß jeder Punkt x des Bereiches $\mathfrak{B}$ Anfangspunkt und Endpunkt eines Extremalenstückes $\mathfrak{e}'$ bzw. $\mathfrak{e}''$ ist, längs dessen

$$(3.1)\quad \begin{cases} \frac{df}{dt} = -F \quad \text{auf } \mathfrak{e}' \\ \frac{dg}{dt} = +F \quad \text{auf } \mathfrak{e}'' \end{cases}$$

gilt, wobei die Differentiation jeweils in Richtung des Linienelementes der einzelnen Extremalenbögen auszuführen ist. Es genügt, die erste dieser Gleichungen zu verifizieren, da die zweite nach ganz genau dem gleichen Verfahren erhalten wird. (3.1) ist für Punkte $x \subset \mathfrak{C}$ trivial, wenn man die Eigenschaft des CARATHÉODORYschen Kontinuums bedenkt, derzufolge durch jeden Punkt $x \subset \mathfrak{C}$ eine nur aus Nullrichtungen bestehende Extremale des Variationsproblems F hindurchgeht. Wir nehmen daher jetzt an, daß x nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegen sei. Wir schlagen um x als Mittelpunkt eine Kugel $\mathfrak{K}_\sigma$ von so kleinem Radius $\sigma > 0$, daß 1. bei geeigneter Wahl der Konstanten p_i das mit F äquivalente Variationsproblem $F + \sum_i p_i x_i$ in ganz $\mathfrak{K}_\sigma$ positiv definit mit der Definitheitsschranke $m > 0$ ist: $F + \sum_i p_i \dot{x}_i \geqslant m|\dot{x}|$, und daß 2. das von x ausgehende ausgezeichnete Extremalenbüschel schlicht und lückenlos die

Kugel $\mathfrak{K}_\sigma$ überdeckt. Das längs eines Stückes einer solchen Büschelextremalen erstreckte Integral hat dann einen kleineren Wert als über jede andere ganz in $\mathfrak{K}_\sigma$ verlaufende Vergleichskurve mit denselben Endpunkten wie das fragliche Extremalenstück. Es sei $\{\gamma_n'\}$ eine $f(x/\mathfrak{C})$ (2.1) definierende Minimalfolge von Kurven, die aus x entspringen und in Punkten $x' \subset \mathfrak{C}$ enden. Es sei $\gamma_n'(\sigma)$ dasjenige x enthaltende zusammenhängende Teilstück von γ_n', das ganz in $\mathfrak{K}_\sigma$ gelegen ist. Die $\gamma_n'(\sigma)$ sind wegen der Bedingung 1 von gleichmäßig beschränkter Bogenlänge, und es ist daher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn sie als gegen eine rektifizierbare Grenzkurve $\gamma'(\sigma)$ gleichmäßig konvergierend angenommen werden: $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n'(\sigma) = \gamma'(\sigma)$. $\gamma'(\sigma)$ ist ein Extremalenbogen für F, dessen Anfangspunkt in x liegt. Wir ersetzen nun die ursprüngliche Minimalfolge $\{\gamma_n'\}$ durch eine neue $\{\hat{\gamma}_n'\}$, deren sämtliche Elemente $\hat{\gamma}_n'$ ein festes von x ausgehendes Teilstück $\hat{\gamma}'(\sigma)$ des Extremalenbogens $\gamma'(\sigma)$ als Anfangsstück enthalten: Dazu betrachten wir das System der Transversalflächen des von x ausstrahlenden Extremalenfeldes. Es besteht aus einer Schar „konzentrischer" einander umgebender Hyperflächen vom topologischen Typus der Kugel, wenn man sich nur auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes x beschränkt. Es sei S die am weitesten von x entfernte noch ganz in der Kugel $\mathfrak{K}_\sigma$ gelegene Fläche dieser Schar, $\hat{x}_n$ der erste auf x folgende Schnittpunkt von γ_n' mit S, $\hat{x}(\sigma)$ der Schnittpunkt von $\gamma'(\sigma)$ mit S. Dann ist wegen des bekannten Zusammenhanges der Transversalflächenschar mit dem zugehörigen Extremalenfelde stets

$$\int_{x\,\gamma_n'}^{\hat{x}_n} F(x,\dot{x})\,dt \geqq \int_{x\,\gamma'(\sigma)}^{\hat{x}(\sigma)} F(x,\dot{x})\,dt; \tag{3.2}$$

und da $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}(\sigma)$ ist, so bekommt man die gewünschte neue Minimalfolge $\{\hat{\gamma}_n'\}$, wenn man für jedes n von $\gamma'(\sigma)$ denjenigen innerhalb S gelegenen Teil $\hat{\gamma}'(\sigma)$ von x bis zum Schnittpunkt $\hat{x}(\sigma)$ beibehält, dann die geradlinige Verbindungsstrecke vom Punkte $\hat{x}(\sigma)$ zum Punkte $\hat{x}_n$ anschließt, und schließlich hieran den über $\hat{x}_n$ hinausliegenden Rest von γ_n' anhängt.

Es sei x_1 ein beliebiger zwischen x und $\hat{x}(\sigma)$ auf $\gamma'(\sigma)$ gelegener Punkt. Ich behaupte

$$f(x/\mathfrak{C}) - f(x_1/\mathfrak{C}) = \int_{x\,\gamma'(\sigma)}^{x_1} F(x,\dot{x})\,dt. \tag{3.3}$$

Es sei $\{\gamma_{1n}'\}$ eine Minimalfolge von Kurven, die von x_1 nach dem Kontinuum $\mathfrak{C}$ führen. Ihre Gegenüberstellung zu der ebenfalls von x_1 nach $\mathfrak{C}$ führenden Kurvenfolge $\{\hat{\gamma}_n' - \hat{\gamma}(\sigma)\}$ liefert:

$$f(x_1/\mathfrak{C}) \leqq f(x/\mathfrak{C}) - \int_{x\,\gamma'(\sigma)}^{x_1} F(x,\dot{x})\,dt, \text{ d. h. } \int_{x\,\gamma'(\sigma)}^{x_1} F(x,x)\,dt \leqq f(x/\mathfrak{C}) - f(x_1/\mathfrak{C}).$$

während allgemein wegen (2.4) die umgekehrte Ungleichung

$$\int_{\gamma'(\sigma)}^{x_1 \atop x} F(x, \dot{x})\, dt \geqslant f(x/\mathfrak{C}) - f(x_1/\mathfrak{C})$$

gilt. Beides zusammen ergibt (3.3); (3.1) ist aber nur die differentielle Fassung hiervon.

Nun erkennt man leicht, daß $\mathfrak{e}', \mathfrak{e}''$ die Anfangsstücke zweier Extremalen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ sind, von denen die erste die Richtung vom Punkte x aus nach dem Kontinuum $\mathfrak{C}$ hat, während die zweite $\mathfrak{E}''$ umgekehrt in der Richtung von $\mathfrak{C}$ nach dem Punkte x verläuft: Denn grenzt man auf $\mathfrak{E}'(\mathfrak{E}'')$ eine Folge einander enthaltender Teilbögen $C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \cdots$ ab, die alle den Punkt x als den einen Endpunkt haben, so bildet die so erhaltene Kurvenfolge $\{C_n\}$ eine Minimalfolge für das Integral $\int F dt$ bei der Berechnung der Funktionen $f(x/\mathfrak{C})$ bzw. $g(x/\mathfrak{C})$. Der Beweis geht nach ganz genau dem gleichen Rezept vonstatten wie vorhin: Man hat hier nur 1. durch eine Folge in einander enthaltener Umgebungen $\mathfrak{U}_n \supset \mathfrak{U}_{n+1} \supset \cdots$ das Kontinuum $\mathfrak{C}$ von dem Gebiete $\mathfrak{B}$ auszuschließen und die Restgebiete $\mathfrak{B} - \mathfrak{U}_n$ an Stelle der früheren Kugel $\mathfrak{K}_\sigma$ treten zu lassen; 2. Die Bedingung 1 der damaligen Konstruktion jetzt durch die Bedingung $\varepsilon(x_1, x_2) > 0$ zu ersetzen für jedes Punktepaar $x_1 \neq x_2$, was aber ohne weiteres möglich ist, da die einzigen Punktepaare $x_1 \neq x_2$ mit $\varepsilon(x_1, x_2) = 0$ auf dem Kontinuum $\mathfrak{C}$ gelegen sind, und somit dem Gebiet $\mathfrak{B} - \mathfrak{U}_n$ überhaupt nicht angehören — — man versichert sich auf solche Weise hier der Existenz von Minimalfolgen von Kurven gleichmäßig beschränkter Bogenlänge in $\mathfrak{B} - \mathfrak{U}_n$ — —; und schließlich werden mit zunehmender Annäherung an $\mathfrak{C}$ die Restintegrale $\int_{\hat{\gamma}_n' - C_n} F dt$ beliebig klein.

$\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ winden sich „spiralig" um die Punktmenge $\mathfrak{C}$ herum. Denn ein angenommener fester Endpunkt $\bar{x} \subset \mathfrak{C}$ würde wegen der Regularität des Variationsproblems F kraft der Minimanteneigenschaft von $\mathfrak{E}'(\mathfrak{E}'')$ dauernd im Sinne (im Gegensinne) der durch $\bar{x}$ hindurchgehenden auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Nullextremalen verschoben werden, wäre also entgegen der Annahme doch nicht fest.

Hätten nun $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ je eine endliche Bogenlänge, so müßte ihr auf $\mathfrak{C}$ gelegenes Ende $\bar{x}$ einer bestimmten Grenzlage zustreben, was nach dem soeben dargelegten nicht der Fall ist. Daher sind sowohl $\mathfrak{E}'$ als auch $\mathfrak{E}''$ beide von unendlicher Bogenlänge.

Wir nennen im Folgenden zwecks kürzerer Ausdrucksweise $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ die vom Punkte x nach $\mathfrak{C}$ gezogenen „geodätischen Halbstrahlen" des Variationsproblems F.

§ 4. Die Heranziehung der Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ (1.2) erlaubt nun eine geometrische Deutung der hinter den Ungleichungen (2.5) steckenden Verhältnisse. Hierbei bekommt $F(x, \xi)$ die Bedeutung des gerichteten Abstandes der Stützebene im Punkte ξ an die Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ vom

Nullpunkte $y_i = 0$ des Hilfsraumes der y. Nennen wir $y_i = f_{x_i}(x/\mathfrak{C})$ den „geometrischen Repräsentanten" der Funktion $f(x/\mathfrak{C})$ im y-Hilfsraume, so ist $\frac{df}{dt} = \sum_i \dot{x}_i f_{x_i}(x/\mathfrak{C})$ der gerichtete Abstand vom Nullpunkt $y_i = 0$ der durch den geometrischen Repräsentanten von $f(x/\mathfrak{C})$ hin durchgelegten Hyperebene mit der Normalenrichtung $\dot{x}_i$.

$F(x,\dot{x}) - \frac{dg}{dt}$, $F(x,\dot{x}) + \frac{df}{dt}$ bedeutet also den gerichteten Abstand des geometrischen Repräsentanten von $g(x/\mathfrak{C})$ bzw. $-f(x/\mathfrak{C})$ von der Stützebene im Punkte $\dot{x}$ an die Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$. Er ist für im Innern der Figuratrix gelegene geometrische Repräsentanten stets >0 und kann nur Null werden, wenn der geometrische Repräsentant auf den Rand der Figuratrix zu liegen kommt. Die Ungleichungen (2.5) im Verein mit (3.1) besagen daher, daß der geometrische Repräsentant von $-f(x/\mathfrak{C})$ bzw. $g(x/\mathfrak{C})$ auf dem Rande der zugehörigen Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ gelegen ist, und daß die Richtungen, unter denen die Extremalen $\mathfrak{E}'$ bzw. $\mathfrak{E}''$ den Punkt x passieren, diejenigen der Normalen sind, welche die Figuratrix $\mathfrak{G}(x)$ am Orte des geometrischen Repräsentanten von $-f(x/\mathfrak{C})$ bzw. $g(x/\mathfrak{C})$ besitzt.

§ 5. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 1. *Ist für zwei innere Punkte x_1 und x_2 des Bereiches $\mathfrak{B}$*

$$\mu(x_1, x_2) < f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}), \tag{5.1}$$

so haben alle von x_1 nach x_2 führenden absoluten Minimanten endliche Bogenlänge. Ist dagegen

$$\mu(x_1, x_2) = f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}), \tag{5.2}$$

so können nur folgende zwei Möglichkeiten eintreten: entweder gibt es keine von x_1 nach x_2 führende absoluten Minimanten endlicher Bogenlänge, oder aber es gibt solche. In diesem letzteren Falle ziehe man durch x_1 den geodätischen Halbstrahl $\mathfrak{E}_1'$, der x_1 zum Anfangspunkt hat und auf $\mathfrak{C}$ endigt, durch x_2 den geodätischen Halbstrahl $\mathfrak{E}_2''$, welcher von $\mathfrak{C}$ kommend in x_2 endigt. Ist dann x_1' ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{E}_1'$, x_2' ein ebenso beliebiger Punkt auf $\mathfrak{E}_2''$, so gibt es von x_1 keine einzige nach x_2' führende absolute Minimante endlicher Bogenlänge. Bedeutet hingegen $\mathfrak{e}_1'$ die rückwärtige Verlängerung von $\mathfrak{E}_1'$ über x_1, $\mathfrak{e}_2''$ gleichermaßen die rückwärtige Verlängerung von $\mathfrak{E}_2''$ über x_2 hinaus, und sind x_1'', x_2'' zwei beliebige Punkte auf diesen respektiven Verlängerungen $\mathfrak{e}_1'$ bzw. $\mathfrak{e}_2''$, so haben alle von x_1'' nach x_2'' führenden absoluten Minimanten endliche Bogenlänge. In dem beschriebenen Sinne trennt also das Punktepaar (x_1, x_2) im Falle (5.2) die Punkte, zwischen denen es noch absolute Minimanten endlicher Bogenlänge gibt von denjenigen, zwischen welchen es solche Minimanten endlicher Bogenlänge unter keinen Umständen mehr gibt.

Beweis: 1. Wir nehmen (5.1) als gültig an: Wir bestimmen dann eine positive Zahl $\eta < \frac{1}{3}[f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}) - \mu(x_1, x_2)]$ und grenzen um

$\mathfrak{C}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_\eta$ derart ab, daß für alle ihre Punkte $x \subset \mathfrak{U}_\eta$ $f(x/\mathfrak{C}) < \eta$ und $g(x/\mathfrak{C}) < \eta$ wird. Es sei γ ein von x_1 nach x_2 führender Weg, welcher $\mathfrak{U}_\eta$ trifft. Wegen (2.4) ist dann

$$(5.3)\quad \int_{\gamma}^{x_1 x_2} F\,dt > [f(x_1/\mathfrak{C}) - \eta] + [g(x_2/\mathfrak{C}) - \eta] = [f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}) - \mu(x_1, x_2)] + \\ + \mu(x_1, x_2) - 2\eta > \mu(x_1, x_2) + \eta > \mu(x_1, x_2).$$

Alle von x_1 nach x_2 führenden Minimalfolgen bleiben also schließlich ganz im Bereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{U}_\eta$. Da für diesen Bereich die Carathéodorysche ε-Funktion stets > 0 ist, für jedes nicht zusammenfallende Punktepaar x_1, x_2 [weil ja alle Punktepaare $x_1 \neq x_2$ mit $\varepsilon(x_1, x_2) = 0$ in $\mathfrak{U}_\eta$, sogar auf $\mathfrak{C}$, gelegen sein müssen!], so haben die absoluten Minimanten endliche Bogenlänge. (Siehe Ende des § 1).

2. Wir betrachten den Fall der Gleichheit (5.2): Ist $x_1' \subset \mathfrak{E}_1'$, $x_2' \subset \mathfrak{E}_2''$ ein im Satz 1 genanntes Punktepaar, so folgt:

$$f(x_1/\mathfrak{C}) - f(x_1'/\mathfrak{C}) + \mu(x_1', x_2') + g(x_2/\mathfrak{C}) - g(x_2'/\mathfrak{C}) \geqq \mu(x_1, x_2)$$

und hieraus wegen der vorausgesetzten Gültigkeit von (5.2) sowie der unbedingten Gültigkeit von (2.4)$_3$

$$(5.4)\qquad \mu(x_1', x_2') = f(x_1'/\mathfrak{C}) + g(x_2'/\mathfrak{C}).$$

Gäbe es nun eine von x_1' nach x_2' führende absolute Minimante endlicher Bogenlänge, so müßte sie wenigstens an der Umgebung ihrer Endpunkte eine Extremale sein, und als solche mit den geodätischen Halbstrahlen $\mathfrak{E}_1'$ und $\mathfrak{E}_2''$ übereinstimmen; denn ein reguläres Variationsproblem hat keine Knickpunkte. Das führt aber zu einem Widerspruch, weil $\mathfrak{E}_1'$ und $\mathfrak{E}_2''$ beide von unendlicher Bogenlänge sind (Ende des § 3).

Bestünde umgekehrt für ein Punktepaar $x_1'' \subset \mathfrak{e}_1'$, $x_2'' \subset \mathfrak{e}_2''$ (den über $x_1(x_2)$ hinausliegenden Verlängerungen der geodätischen Halbstrahlen $\mathfrak{E}_1'$ bzw. $\mathfrak{E}_2''$) die Hypothese (5.2), so käme man für das Punktepaar x_1, x_2 in der soeben geschilderten Weise zu einem Widerspruch. Damit ist Satz 1 in allen Teilen bewiesen.

Satz 2. *Es sei x_1, x_2 ein solches Punktepaar in $\mathfrak{B}$, daß der von x_1 ausgehende geodätische Halbstrahl $\mathfrak{E}_1'$ den von $\mathfrak{C}$ herkommenden und in x_2 einmündenden geodätischen Halbstrahl $\mathfrak{E}_2''$ außerhalb $\mathfrak{C}$ trifft. Dann hat jede von x_1 nach x_2 führende absolute Minimante eine endliche Bogenlänge.*

Beweis: Bedeutet x_3 den fraglichen Schnittpunkt von $\mathfrak{E}_1'$ mit $\mathfrak{E}_2''$, so ist wegen

$$f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C}) - \mu(x_1, x_2) \geqq f(x_3/\mathfrak{C}) + g(x_3/\mathfrak{C}) > 0$$

die Bedingung (5.1) des Satzes 1 erfüllt.

Hieraus folgt für ebene Variationsprobleme wegen des in der Ebene gültigen Jordanschen Kurvensatzes der

Satz 3. *Ist das Carathéodorysche Kontinuum $\mathfrak{C}$ eine einfach geschlossene Jordan-Kurve und sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ die zwei Gebiete der durch*

$\mathfrak{C}$ bewirkten Zerlegung der Ebene, so lassen sich je zwei Punkte x_1 und x_2, die demselben Gebiete $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{B}_2$ angehören, stets durch eine absolute Minimante endlicher Bogenlänge miteinander verbinden.

Denn in der Ebene müssen sich die in Satz 2 genannten geodätischen Halbstrahlen $\mathfrak{E}_1'$ und $\mathfrak{E}_2''$ stets außerhalb $\mathfrak{C}$ treffen, wenn x_1 und x_2 einem und demselben der durch $\mathfrak{C}$ bestimmten Gebiete angehören.

2.

§ 6. Nun seien beliebig viele Carathéodorysche Kontinua $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ vorhanden. Dann gilt für die in § 2 definierten Funktionen $f(x/\mathfrak{C})$ und $g(x/\mathfrak{C})$ der

Satz 4. *Sind $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei verschiedene Carathéodorysche Kontinua, so hat $f(x/\mathfrak{C}_1)$ $[g(x/\mathfrak{C}_1)]$ für alle Punkte $x \subset \mathfrak{C}_2$ einen konstanten Wert. $\mathfrak{C}_2$ ist also für $f(x/\mathfrak{C}_1)$ $[g(x/\mathfrak{C}_1)]$ von „Niveauflächencharakter".*

Beweis: Es genügt, den Beweis für $f(x/\mathfrak{C})$ zu führen. Es seien x' und x'' zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{C}_2$, γ', γ'' zwei Wege, von denen der erste von x' nach x'', der zweite von x'' nach $\mathfrak{C}_1$ führt, sodaß

$$0 \leqq \int_{\substack{x' \\ \gamma'}}^{x''} F\,dt \leqq \eta, \quad 0 \leqq \int_{\substack{x'' \\ \gamma''}}^{\mathfrak{C}_1} F\,dt - f(x''/\mathfrak{C}_1) \leqq \eta$$

ausfällt und hierin $\eta > 0$ eine vorgeschriebene Zahl ist. Dann folgt aus der Definition (2. 1) von $f(x/\mathfrak{C}_1)$:

$$f(x'/\mathfrak{C}_1) \leqq \int_{\substack{x' \\ \gamma'}}^{x''} F\,dt + \int_{\substack{x'' \\ \gamma''}}^{\mathfrak{C}_1} F\,dt \leqq f(x''/\mathfrak{C}_1) + 2\eta.$$

Da x' und x'' miteinander vertauscht werden dürfen, bekommt man auf gleiche Weise auch die umgekehrte Ungleichung $f(x''/\mathfrak{C}_1) \leqq f(x'/\mathfrak{C}_1) + 2\eta$ und wegen der Willkür von $\eta > 0$ folgt hieraus der Satz 4.

Satz 5. *Konvergieren die Funktionenfolgen $\{f(x/\mathfrak{C}_n)\}$ und $\{g(x/\mathfrak{C}_n)\}$ in einem Punkte $x_1 \subset \mathfrak{B}$, so gibt es ein Kontinuum $\overline{\mathfrak{C}}$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1/\mathfrak{C}_n) = f(x_1/\overline{\mathfrak{C}}), \quad \lim_{n\to\infty} g(x_1/\mathfrak{C}_n) = g(x_1/\mathfrak{C}). \tag{6.1}$$

Beweis. Es genügt, die Funktionenfolge $\{f(x/\mathfrak{C}_n)\}$ zu betrachten. Man kann stets, evtl. durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge, eine Punktfolge $\bar{x}_n \subset \mathfrak{C}_n$ so bestimmen, daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ existiert. Es sei $\mathfrak{E}_n$ das durch $\bar{x}_n$ hindurchgehende auf $\mathfrak{C}_n$ gelegene Nullextremalenstück, das stets so gewählt werden kann, daß seine Bogenlänge oberhalb einer von Null verschiedenen Zahl verbleibt, die selbst nicht wieder von n abhängt. $\overline{\mathfrak{E}}$ sei die durch $\bar{x}$ hindurchgehende Nullextremale, gegen welche sich die $\mathfrak{E}_n$ häufen. Weil $\overline{\mathfrak{E}}$ eine von Null verschiedene Länge hat, ist das Kontinuum $\overline{\mathfrak{C}}$, welches $\overline{\mathfrak{E}}$ enthält,

nicht leer. Es bezeichne $\mathfrak{g}_n$ die geradlinige Verbindungsstrecke in der Richtung $\bar{x}_n \to \bar{x}$, $\eta > 0$ eine beliebige Zahl. Wir können dann immer eine von x_1 nach $\bar{x}_n$ führende Kurve γ_n so finden, daß

$$f(x_1/\mathfrak{C}_n) + \eta \geqslant \int\limits_{\substack{x_1 \\ \gamma_n}}^{\bar{x}_n} F\,dt \tag{6.2}$$

ist (vgl. § 2). Andererseits folgt aus der Definition (2.1) der Funktion $f(x/\mathfrak{C})$:

$$\int\limits_{\substack{x_1 \\ \gamma_n}}^{\bar{x}_n} F\,dt + \int\limits_{\substack{\bar{x}_n \\ \mathfrak{g}_n}}^{\bar{x}} F\,dt = \int\limits_{\substack{x_1 \\ \gamma_n + \mathfrak{g}_n}}^{\bar{x}} F\,dt \geqslant f(x_1/\bar{\mathfrak{C}}). \tag{6.3}$$

Nenne ich nun den existierenden Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} f(x_1/\mathfrak{C}_n) = \Phi(x_1), \tag{6.4}$$

so gibt die Kombination von (6.2), (6.3) und (6.4) wegen der Willkür von $\eta > 0$

$$\Phi(x_1) \geqslant f(x_1/\bar{\mathfrak{C}}). \tag{6.5}$$

Andererseits sei γ ein beliebiger Weg von x_1 nach $\bar{x}$, $\mathfrak{g}_n'$ das umgekehrt durchlaufene Geradenstück $\mathfrak{g}_n$ von $\bar{x} \to \bar{x}_n$. Dann gilt

$$\int\limits_{\substack{x_1 \\ \gamma}}^{\bar{x}} F\,dt - \Phi(x_1) = \Big[\int\limits_{\substack{x_1 \\ \gamma + \mathfrak{g}_n'}}^{\bar{x}_n} F\,dt - f(x_1/\mathfrak{C}_n)\Big] + \big[f(x_1/\mathfrak{C}_n) - \Phi(x_1)\big] - \int\limits_{\substack{\bar{x} \\ \mathfrak{g}_n'}}^{\bar{x}_n} F dt \geqslant$$

$$\geqslant \big[f(x_1/\mathfrak{C}_n) - \Phi(x_1)\big] - \int\limits_{\substack{\bar{x} \\ \mathfrak{g}_n'}}^{\bar{x}_n} F\,dt.$$

Wegen (6.4) und $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ folgt hieraus, wenn man die Willkür in der Wahl der von x_1 nach $\bar{x}$ führenden Kurve γ noch berücksichtigt:

$$f(x_1/\bar{\mathfrak{C}}) \geqslant \Phi(x_1). \tag{6.6}$$

(6.5) und (6.6) zusammen ergeben

$$f(x_1/\bar{\mathfrak{C}}) = \Phi(x_1) = \lim_{n \to \infty} f(x_1/\mathfrak{C}_n). \tag{6.7}$$

Die Betrachtung des hier dargelegten Gedankenganges zeigt, daß jedesmal die Limsrelation (6.7) besteht, wenn nur die ausgewählte Punktefolge $\{\bar{x}_n\}$ konvergiert, und daß dann das Kontinuum $\bar{\mathfrak{C}}$ eindeutig durch den Limespunkt $\bar{x}$ der Punktfolge $\{\bar{x}_n\}$ bestimmt ist. Es kann also in den ganzen Überlegungen die Funktion $f(x/\mathfrak{C}_n)$ überall auch durch die Funktion $g(x/\mathfrak{C}_n)$ ersetzt werden; damit folgt (6.1), und Satz 5 ist in allen Teilen bewiesen.

§ 7. Man zeigt nun genau so wie im Falle des Vorhandenseins nur eines einzigen Kontinuums $\mathfrak{C}$ (§ 3) für jeden auf keinem solchen $\mathfrak{C}$ gelegenen Punkt x aus $\mathfrak{B}$ die Existenz der geodätischen Halb-

strahlen, die von x nach einem vorgegebenen Kontinuum $\mathfrak{C}$ hinführen, bzw. aus einem solchen $\mathfrak{C}$ in x einmünden. Liegt x auf einem $\mathfrak{C}$ selbst, so gibt es solche geodätischen Halbstrahlen nicht, wenn man nicht in diesem Falle als Ersatz für sie die durch x hindurchgehende und ganz auf $\mathfrak{C}$ verbleibende Nullextremale ansehen will. Diese führt aber nicht aus $\mathfrak{C}$ heraus! Zwei Punkte $x_1 \subset \mathfrak{C}_1$ und $x_2 \subset \mathfrak{C}_2$, die auf verschiedenen Kontinuen gelegen sind, lassen sich also nicht durch eine absolute Minimante miteinander verbinden!

Satz 6. *Ist für irgendein aus $\mathfrak{B}$ herausgegriffenes Punktepaar x_1, x_2*

$$\mu(x_1, x_2) < \underset{\mathfrak{C}}{\text{untere Grenze}} \{f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C})\}, \tag{7.1}$$

worin zum Vergleich alle Carathéodoryschen Kontinua $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{B}$ zu berücksichtigen sind, so haben alle von x_1 nach x_2 führenden absoluten Minimanten eine endliche Bogenlänge. Ist dagegen

$$\mu(x_1, x_2) = \underset{\mathfrak{C}}{\text{untere Grenze}} \{f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C})\}, \tag{7.2}$$

so liegt genau der gleiche Grenzfall vor, wie er in Satz 1, § 5, auftrat: entweder gibt es dann keine absoluten Minimanten endlicher Bogenlänge, die von x_1 nach x_2 führen, oder aber falls doch, dann trennt das Punktepaar (x_1, x_2) diejenigen Punktepaare (x_1', x_2'), zwischen denen es keinerlei von x_1' nach x_2' führende absolute Minimanten endlicher Bogenlänge gibt, von solchen (x_1'', x_2'') für welche jede absolute Minimante, die x_1'' zum Anfangspunkt und x_2'' zum Endpunkt hat, eine endliche Bogenlänge besitzt.

Beweis: Der Fall (7.1) wird genau so behandelt, wie der ihm entsprechende Fall (5.1) des Satzes 1, indem man um jedes einzelne Kontinuum $\mathfrak{C}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_\eta(\mathfrak{C})$ derart legt, daß für alle Punkte $x \subset \mathfrak{U}_\eta(\mathfrak{C})$ sowohl $f(x/\mathfrak{C}) < \eta$ als auch $g(x/\mathfrak{C}) < \eta$ wird, und

$$\eta < \tfrac{1}{3} \left[\underset{\mathfrak{C}}{\text{untere Grenze}} \left(f(x_1/\mathfrak{C}) + g(x_2/\mathfrak{C})\right) - \mu(x_1, x_2)\right]$$

wählt.

Im Falle (7.2) zieht man Satz 5. (§ 6) heran. Ihm zufolge gibt es ein $\overline{\mathfrak{C}}$ mit

$$\mu(x_1, x_2) = f(x_1/\overline{\mathfrak{C}}) + g(x_2/\overline{\mathfrak{C}}),$$

und nun verläuft für dieses $\overline{\mathfrak{C}}$ alles genau so wie beim entsprechenden Fall (5.2) des Satzes 1. Die in Satz 6 erwähnten Punktepaare, welche durch (x_1, x_2) voneinander getrennt werden, liegen auf den geodätischen Halbstrahlen durch x_1 und x_2, die sich in der Richtung $x_1 \to \overline{\mathfrak{C}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}} \to x_2$ ziehen lassen.

(Eingegangen am 12. Januar 1944.)

Über die Zerstückung eines Eikörpers.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Bekanntlich kann eine beschränkte Menge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes im allgemeinen nicht in n Teilmengen zerstückt werden, die alle einen kleineren Durchmesser aufweisen als die ursprüngliche Menge. Diese Möglichkeit besteht bereits nicht für das reguläre Simplex. Daß eine Zerstückung der vorgeschriebenen Art im allgemeinen auch für Eikörper, d. h. für abgeschlossene beschränkte und konvexe Mengen mit regulärem Rand nicht möglich ist, lehrt ein Satz von K. Borsuk [1]), nach welchem bei jeder Zerlegung der n-dimensionalen Kugel in n Mengen wenigstens eine Menge einen Durchmesser hat, der mit demjenigen der Kugel übereinstimmt. Dagegen hat K. Borsuk [2]) an anderer Stelle die Vermutung ausgesprochen, daß es stets möglich sei, eine beliebige beschränkte Menge des n-dimensionalen Raumes in $n+1$ Mengen so zu zerlegen, daß jede Menge einen kleineren Durchmesser erhält. Merkwürdigerweise scheint der Nachweis dieser Aussage für $n > 2$ mit Schwierigkeiten verbunden zu sein. In der vorliegenden Arbeit beweise ich die Vermutung für Eikörper, wobei eine Abschätzung für die Durchmesser der Teilstücke gegeben wird, die mit der Krümmung der Randfläche des Eikörpers zusammenhängt.

Wir zeigen: *Ein n-dimensionaler $(n > 1)$ Eikörper K mit dem Durchmesser $D(K) = 1$ läßt sich in $n+1$ Teile $M_i (i = 0, 1, \ldots . n)$ so zerstücken, daß für die Durchmesser der Teilstücke gilt*

$$D(M_i) \leqq 1 - 2r\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}\right\},$$

wobei r den inneren Rollradius der Randfläche von K bezeichnet.

Der innere Rollradius einer Eifläche ist der Radius der größten Kugel, die ungehindert im Inneren der Eifläche rollen kann [3]). Offenbar

---

[1]) K. Borsuk, Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, II. Bd. S. 192.

[2]) K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fundam. Math. XX (1933), 177—190.

[3]) Der innere Rollradius r ist gleich dem kleinsten Hauptkrümmungsradius der Eifläche. Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 113—119. Im Hinblick auf die Voraussetzung der Regularität der Randfläche (Bezeichnung „Eikörper"!) ist dieser kleinste Hauptkrümmungsradius positiv.

gehört jeder Punkt eines Eikörpers, insbesondere jeder Randpunkt, zu wenigstens einer Kugel, die ganz zum Körper gehört und deren Radius gleich dem inneren Rollradius der Randfläche ist. Von diesem Sachverhalt wird beim unten folgenden Beweis wesentlich Gebrauch gemacht.

Die Punkte von K und allgemeiner die Punkte des n-dimensionalen Raumes sollen durch Vektoren, die von einem Ursprungspunkt 0 ausgehen, gekennzeichnet werden; solche Ortsvektoren werden mit kleinen Buchstaben geschrieben und im übrigen verwenden wir die übliche Schreibweise für Betrag, Skalarprodukt usw. Im Hinblick auf eine möglichst einfache Darstellung ist es zweckmäßig, sowohl für die Raumpunkte selbst als auch für die ihnen zugewiesenen Ortsvektoren die gleiche Bezeichnung zu gebrauchen. — Als Hilfsfigur führen wir ein der Einheitskugel um 0 einbeschriebenes reguläres n-dimensionales Simplex mit den Ecken $e_\nu, \nu = 0, 1, \cdots n$, ein, so daß

$$(e_\nu, e_\mu) = -\frac{1}{n} \; (\nu \neq \mu); \; |e_\nu| = 1$$

gilt. Ist x ein beliebiger Punkt des Raumes, so wird für wenigstens einen geeignet gewählten Index j

$$(1) \qquad (x, e_j) \geqq \frac{|x|}{n}$$

ausfallen. Diese Aussage kann wie folgt nachgewiesen werden: Je n von den $n+1$ Simplexvektoren spannen einen abgeschlossenen Winkelraum auf, der als konvexe Hülle der n durch die Vektoren gelegten Halbgeraden definiert werden kann. Der gewählte Punkt x liegt in wenigstens einem solchen Winkelraum, und ohne Einbuße an Allgemeinheit kann

$$x = \sum_1^n \alpha_\nu e_\nu, \; \alpha_\nu \geqq 0, \; 1 \leqq \nu \leqq n$$

geschrieben werden. Mit Rücksicht auf eine kurze und zweckmäßige Darstellung der nachfolgenden Rechnung führen wir die Mittelwerte $\xi = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n \alpha_\nu^2}$ und $\eta = \frac{1}{n} \sum_1^n \alpha_\nu$ ein, für die nach einer bekannten Ungleichung $\xi \geqq \eta$ ist. Offenbar läßt sich ein Index j so angeben, daß $\alpha_j \geqq \xi$ gilt. Nun ist

$$(x, e_j) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha_j - \frac{1}{n} \sum_1^n \alpha_\nu,$$

also mit Verwendung der oben eingeführten Mittelwerte

$$n(x, e_j) \geqq \xi + n(\xi - \eta).$$

Wie eine einfache Nachrechnung zeigt, ist

$$|x| = \sqrt{\xi^2 + n(\xi^2 - \eta^2)},$$

so daß mit $2\xi \geqq \xi + \eta$ zunächst

$$|x| \leqq \sqrt{\xi^2 + 2n\xi(\xi - \eta)} \leqq \xi + n(\xi - \eta),$$

und dann

$$|x| \leqq \xi + n(\xi - \eta) \leqq n(x, e_j)$$

folgt. Dies ist die Behauptung (1).

Es bezeichne nun $\varrho(p)$ den Radius der größten Kugel um den Punkt p, die noch ganz in K liegt, falls p zu K gehört; für die übrigen Punkte p sei $\varrho(p) = 0$.

Wir zeigen jetzt: Ist p ein beliebiger Punkt von K, so läßt sich wenigstens ein geeigneter Index j angeben, so daß

$$\varrho\left(p + \frac{r}{n} e_j\right) \geqq r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \tag{2}$$

ausfällt. In der Tat: Da r der innere Rollradius von K ist, gibt es eine Kugel K^0 vom Radius r, die ebenfalls p enthält und die ganz zu K gehört. Wir bezeichnen den Mittelpunkt von K^0 mit z und setzen $x = z - p$. Wie oben festgestellt, gibt es einen Index j, so daß $(x, e_j) \geqq \frac{|x|}{n}$ ist. Es sei jetzt $y = p + \frac{r}{n} e_j$. Nun rechnet man aus

$$(y - z)^2 = \left(\frac{r}{n} e_j - x\right)^2 = \frac{r^2}{n^2} + x^2 - \frac{2r}{n}(x, e_j),$$

also

$$(y - z)^2 \leqq \frac{r^2}{n^2} + |x|^2 - \frac{2r|x|}{n^2} = r^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - (r - |x|)\left(r + |x| - \frac{2r}{n^2}\right),$$

und im Hinblick auf $|x| \leqq r$, $n > 1$ schließt man

$$|y - z| \leqq r\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Beachtet man jetzt, daß die Kugel K^0 vom Radius r um z ganz zu K gehört, so ergibt sich

$$\varrho(y) \geqq r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right),$$

und das ist die Behauptung (2).

Wir ordnen nun jedem zu K gehörenden Punkt q die $n + 1$ Punkte $q_i = q - \frac{r}{n} e_i (i = 0, 1, .. n)$ zu. Für ein festes i bilden die Punkte q_i einen zu K kongruenten Eikörper K_i, der aus K durch die Translation mit dem Vektor $-\frac{r}{n} e_i$ hervorgeht. Es sei nun p ein beliebiger Punkt von K. Hat der Index j die nämliche Bedeutung wie in der oben abgeleiteten Hilfsaussage, so läßt sich, falls $q = p + \frac{r}{n} e_j$ gesetzt wird, $p = q_j$ schreiben. Im Hinblick auf die soeben zitierte Hilfsaussage (2) gehört der Punkt p samt der Umkugel vom Radius

$$\varrho = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

zum Eikörper K_j. Bezeichnet nun weiter K_i^* $(i = 0, 1, .. n)$ die innere Parallelmenge von K_i im Abstand ϱ, d. h. die Menge derjenigen Punkte

von K_i, die vom Rand einen Abstand haben, der nicht kleiner ist als ϱ, so läßt sich der oben festgestellte Sachverhalt wie folgt interpretieren: Die $n+1$ Mengen K_i^* $(i = 0, 1, .. n)$ überdecken den Eikörper K vollständig. Setzen wir nun endlich

$$M_0 = K K_0^*,$$
$$M_1 = (K - M_0) K_1^*,$$
$$M_2 = (K - M_0 - M_1) K_2^*,$$

$$M_n = (K - M_0 - \cdots - M_{n-1}) K_n^*,$$

so ist offenbar $K = M_0 + M_1 + \cdots + M_n$, und nach Konstruktion gilt für die Durchmesser der Mengen $D(M_i) \leqq D(K_i^*)$. Nun ist aber

$$D(K_i^*) \leqq 1 - 2\varrho.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Nachfolgend behandeln wir noch kurz die Auswirkung unseres Resultates über die Zerstückung eines Eikörpers auf den Spezialfall der Kugel und gehen noch auf einige ergänzende Bemerkungen ein.

Es sei also K die n-dimensionale Kugel vom Durchmesser $D(K) = 1$. Offenbar ist der innere Rollradius $r = \frac{1}{2}$. Wir bezeichnen nun mit Z eine Zerstückung von K in $n+1$ Teile $M_i (i = 0, 1, .. n)$, und ferner bedeute $D(Z)$ den größten der $n+1$ Durchmesser $D(M_i)$. Nach unserer Abschätzungsformel gibt es geeignete Zerstückungen Z^* von K so, daß

$$\text{(a)} \qquad D(Z^*) \leqq \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

Andererseits lehrt eine einfache Überlegung, daß für jede beliebige Zerstückung Z von K

$$\text{(b)} \qquad D(Z) \geqq \sqrt{\frac{n+1}{2n}}$$

gelten muß. Die rechts stehende Schranke ist die Seitenlänge des der Kugel K einbeschriebenen regulären n-dimensionalen Simplex. Die Feststellung (b) kann in einfacher Weise so erfolgen: Die $n+1$ abgeschlossenen Hüllen der Durchschnitte der Mengen M_i mit der Oberfläche der Kugel, die wir mit A_i bezeichnen, bedecken offenbar die Oberfläche. Entweder wird eine der Mengen A_j die Oberfläche allein bereits überdecken, oder wenigstens zwei dieser Mengen, etwa A_k und A_l haben einen nicht leeren Durchschnitt $A_k A_l$. Im ersten Fall ist die Behauptung (b) bereits erwiesen. Im zweiten Fall lege man eine Ecke des oben erwähnten regulären Simplex in den Durchschnitt $A_k A_l$. Die naheliegende Anwendung des sog. Schubfachprinzips zeigt jetzt, daß wenigstens eine der Mengen A_i wenigstens zwei Eckpunkte des Simplex enthalten muß, woraus wieder (b) folgt.

Nach einer auf B. KNASTER[4]) zurückgehenden Fragestellung ist die Zahl

$$D_n = \text{fin inf}\, D(Z),$$

d. h. die untere Grenze für alle größten Durchmesser $D(Z)$, die sich bei Ausführung der Menge aller möglichen Zerstückungen Z der Kugel K in $n+1$ Teile ergeben, von Interesse. Nach unsern Feststellungen (a) und (b) ist jedenfalls

$$\sqrt{\frac{n+1}{2n}} \leqq D_n \leqq \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}.$$

Vermutlich gilt[5])

$$D_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \qquad (n \text{ gerade})$$

$$D_n = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n+3}}} \qquad (n \text{ ungerade}).$$

Besonders zu beachten ist noch, daß im Falle $n = 2$ alle oben angegebenen Abschätzungen exakt werden[6]).

---

[4]) B. KNASTER, Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, S. 194.

[5]) Inwieweit diese Frage geklärt ist, ist dem Verf. z. Zt. nicht bekannt.

[6]) Für $n = 2$ gelten bemerkenswerterweise alle Gleichheiten:

$$\sqrt{\frac{n+1}{2n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}};\ D_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Eingegangen am 12. August 1944.)

Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckssnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden.

Zweiter Teil:

Rückungsfadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur auf den Scherkschen Minimalflächen und auf den Wendelschraubenflächen.

Von

H. Graf und H. Thomas † in Darmstadt.

I. Fragestellung.

Im ersten Teil unserer Untersuchungen[1]) haben wir infinitesimale, unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur betrachtet. Von diesen Fadennetzen wollen wir im vorliegenden zweiten Teil solche Netze untersuchen, die zugleich „*Rückungsnetze*" sind.

Wir bezeichnen als Rückungsnetz allgemein ein Netz aus zwei Kurvenscharen, bei dem die Kurven jeder Schar durch Rückung, d. h. Parallelverschiebung längs einer Kurve der anderen Schar, auseinander hervorgehen. Jedes Rückungsnetz ist ein äquidistantes Kurvennetz und bildet auf seiner Trägerfläche, der Rückungsfläche (Translationsfläche), ein konjugiertes Kurvennetz. Insbesondere kann jedes Rückungsnetz durch passende Anordnung der Netzkurven in ein solches mit rhombischer Netzstruktur verwandelt werden. Wählt man bei der angegebenen Netzerzeugung durch Parallelverschiebung einer Kurve längs einer zweiten Kurve und der zweiten Kurve längs der ersten von vornherein diese beiden Kurven zueinander kongruent und parallelgestellt, dann besteht das erzeugte Rückungsnetz aus l a u t e r kongruenten und parallelgestellten Kurven[2]). Bei solchen Rückungsnetzen besitzen die Netz-

[1]) Zur Frage des Gleichgewichts von Viereckssnetzen aus verknoteten und gespannten Fäden. Erster Teil: Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen (Kapitel I und II); Kennzeichnung, Übersicht und kurze Beschreibung der allgemeinsten Netze besonderer Netzklassen (Kapitel III und IV). Math. Zeitschrift 48 (1942), S. 193. Im folgenden kurz als „Teil I" angeführt.

[2]) Man kann natürlich bei der Netzerzeugung auch von zwei n i c h t kongruenten Kurven (hier erklärt als zwei endlich begrenzte singularitätenfreie Kurvenstücke) ausgehen und diese durch Zufügen geeigneter Kurvenfortsätze in zwei kongruente und parallelgestellte Kurven verwandeln. Demzufolge erscheint jedes beliebige Rückungsnetz (mit nur scharweise kongruenten Netzkurven) als ein Teil eines Rückungsnetzes mit lauter kongruenten Netzkurven.

kurven stets Hüllkurven, welche jeweils zu den Netzkurven ähnlich, „parallelgestellt" und doppelt so groß sind und welche außerdem Schmiegtangentenkurven der Netzträgerfläche darstellen[3]). Im Falle ebener Kurven sind hier auch die Trägerflächen eben.

Rückungsnetze, welche zugleich im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur sind, waren bereits in Teil I Gegenstand unserer Untersuchungen. Als äquidistante und zugleich konjugierte Fadennetze wurden sie dort in der Sonderklasse IV δ) zusammengefaßt und ihre Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt; ferner wurde als vorläufiges Ergebnis ausgesprochen, daß als Trägerflächen dieser Netze nur gewisse Minimalflächen, nämlich die Scherkschen Flächen und die Wendelschraubenflächen, in Betracht kommen[4]).

Nun ist jede *Scherksche Fläche* Trägerfläche von einem Rückungsnetz aus ebenen Kurven und von zwei Mannigfaltigkeiten von je ∞ Rückungsnetzen aus gewundenen Kurven. Bei jedem Rückungsnetz aus gewundenen Kurven gehen sämtliche Netzkurven durch Parallelverschiebung auseinander hervor und umhüllen daher eine Schmiegtangentenkurve der Scherkschen Fläche. Man erhält demnach ein solches aus gewundenen Kurven bestehendes Rückungsnetz unserer beiden Netzmannigfaltigkeiten auf der Fläche, indem man irgendeine Kurve aus den beiden Scharen von Schmiegtangentenkurven herausgreift, auf die halbe Größe ähnlich verkleinert und — parallelgestellt — an dieser Schmiegtangentenkurve berührend gleiten läßt[5]).

Ferner ist jede *Wendelschraubenfläche* Trägerfläche einer Mannigfaltigkeit von ∞^1 Rückungsnetzen aus gewundenen Kurven. Auch bei jedem dieser Rückungsnetze gehen sämtliche Netzkurven durch Parallelverschiebung auseinander hervor und besitzen daher als doppelt so große Hüllkurve wieder eine gewundene Schmiegtangentenkurve der Fläche, d. i. hier eine Schraubenlinie um die Achse der Wendelschraubenfläche. Jede dieser koaxialen Schraubenlinien unserer Wendelschraubenfläche kann dann wieder — entsprechend dem Vorgang bei den Scherkschen Flächen — zur Erzeugung eines aus halb so großen, exaxialen Schraubenlinien bestehenden Rückungsnetzes dienen. Wir werden jedoch zu diesen Rückungsnetzen auf den Wendelschraubenflächen auf eine andere, mittelbare Weise gelangen, indem wir diese Flächen als eine Ausartung der Scherkschen Flächen auffassen.

---

[3]) vgl. hierzu z. B. Scheffers, Theorie der Flächen, 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1922, S. 246.

[4]) vgl. Teil I, S. 210 und 211.

[5]) vgl. S. Lie, Weitere Untersuchungen über Minimalflächen, Gesammelte Abhandlungen, Band I, S. 414. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen: Projektivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen. Gesammelte Abhandlungen, Band II, S. 122. Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem. Gesammelte Abhandlungen, Band II, S. 526.

Wir haben bei unserer Untersuchung jetzt noch die Frage zu beantworten, ob alle diese Rückungsnetze nach rhombischer Anordnung ihrer Netzkurven auch tatsächlich im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung darstellen. Zu diesem Zweck werden wir die Gleichungen aller dieser Rückungsfadennetze aufstellen und dabei zugleich versuchen, ein anschaulich-geometrisches Bild der ∞^1 formverschiedenen Scherkschen Flächen und aller auf ihr gelegenen Rückungsnetze zu geben (Abschnitt II und III). Dies geschieht, um die neue Deutung der besagten Netze bzw. Flächen entwickeln zu können, erscheint aber auch angebracht im Hinblick auf manche Unvollständigkeiten und Unklarheiten in der ausgedehnten Literatur dieser Minimalflächen[6]). An Hand der aufgestellten Netzgleichungen wird dann bestätigt, daß für alle hergeleiteten Rückungsnetze die Gleichgewichtsbedingungen (IV δ 1) und (IV δ 2)[4]) erfüllt werden (Abschnitt IV). Zum Schluß stellen wir unseren im Gleichgewicht befindlichen infinitesimalen Fadennetzen ebensolche finitesimale Fadennetze, d. h. Netze mit endlicher Maschenweite und Fadenspannung, gegenüber. Dies wird eingehender verfolgt bei den Fadennetzen der Sonderklassen IV α) bis IV δ) und hierbei festgestellt, daß die Netze α) und β) und ebenso die Netze γ) und δ) einander reziprok — wie Lageplan und Kräfteplan — entsprechen. Damit ist der innere Zusammenhang, der die untersuchten Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur miteinander verbindet, aufgedeckt und zugleich nachgewiesen, daß der Leitgedanke, welcher der Auswahl, Herleitung und Zusammenstellung dieser Netze in Teil I zugrunde lag, dem Problem entsprechend und einheitlich war[7]). Schließlich werden — modellmäßig realisiert — finitesimale Fadennetze zur Veranschaulichung der untersuchten infinitesimalen Fadennetze und deren Trägerflächen in mehreren Fotobildern wiedergegeben (Abschn. V).

II. Die rhombischen Rückungsnetze auf den Scherkschen Minimalflächen.

1. Gleichung[8]) und Gestalt der Scherkschen Minimalflächen.

Wir schreiben für die Gleichung der Scherkschen Minimalflächen, bezogen auf ein rechtwinkliges Kartesisches Rechtskoordinatensystem:

$$(1\,a) \qquad e^{z} = \cos\left(\frac{x}{\sin\gamma} - \frac{y}{\cos\gamma}\right) : \cos\left(\frac{x}{\sin\gamma} + \frac{y}{\cos\gamma}\right)$$

[6]) vgl. Anm. 10, 15.

[7]) Die dem entgegenstehende Aussage von O. Volk im Referat zu Teil I, Zentralblatt **27** [1943], S. 90, ist nicht stichhaltig. Auch sind dort mißverständliche Angaben über Bekanntsein von Ergebnissen gemacht.

[8]) vgl. S. Lie, Anm. 5, sowie H. F. Scherk, Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **13** (1835), S. 185 und H. A. Schwarz, Fortgesetzte Untersuchungen über spezielle Minimalflächen, Gesammelte mathematische Abhandlungen I. S. 147.

oder

$$\mathfrak{Tg}\, z = \operatorname{tg} \frac{x}{\sin\gamma} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{\cos\gamma}. \tag{1b}$$

Die Form (1a) ist die gebräuchliche, die auch Lie verwendet; die Form (1b) ist für einige Betrachtungen bequemer. Die Gleichung hängt von einer wesentlichen Konstanten γ ab, von deren geometrischer Bedeutung als Winkel alsbald die Rede sein wird. Für $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ erhält man die sämtlichen ∞^1 formverschiedenen, nicht ausgearteten Scherkschen Minimalflächen. Als formverschieden sollen dabei auch jeweils zwei Flächen gelten, die zwar spiegelsymmetrisch zueinander, aber nicht deckungskongruent sind, also zwei jeweils durch die Beziehung $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ einander zugeordnete Flächen. In dem Spezialfall $\gamma = \frac{\pi}{4}$ hat man die „gleichseitige" Scherksche Minimalfläche[9])[10]). Eine zweite, den Größenmaßstab kennzeichnende Konstante λ, welche in die Flächengleichung als gemeinsamer Faktor von x, y und z eingehen würde, ist gleich 1 gesetzt, d. h. von der Mannigfaltigkeit in der Größe verschiedener, aber in der Form gleicher Flächen wird von vornherein abgesehen.

Aus der Gleichung (1b) ersieht man, daß jede Scherksche Minimalfläche unendlich viele diskret angeordnete gerade Linien enthält, nämlich:

a) zwei Folgen von je ∞^1 Geraden in der (x, y)-Ebene:

$$\begin{cases} x = m\pi \sin\gamma, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y = m\pi \cos\gamma, \\ z = 0, \end{cases}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

die zusammen ein Rechtecksnetz bilden, und

b) zwei Systeme von je ∞^2 Geraden senkrecht zur (x, y)-Ebene:

$$\begin{cases} x = (m + \frac{1}{2})\pi \sin\gamma, \\ y = n\pi \cos\gamma, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = m\pi \sin\gamma, \\ y = (n + \frac{1}{2})\pi \cos\gamma, \end{cases}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

deren Geraden durch die Mittelpunkte der Seitenstrecken des Rechtecksnetzes hindurchgehen (vgl. Fig. 1).

---

[9]) Diese spezielle Fläche nennt H. A. Schwarz die Scherk-Plateausche Minimalfläche.

[10]) Mißverständlicherweise wird diese spezielle Scherksche Fläche, deren Gleichung bezogen auf ein anderes rechtwinkliges Koordinatenkreuz auch in der Form

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}$$

geschrieben werden kann, in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (Band III, 3, S. 309), in der Dissertation von R. Kummer (Die Flächen mit unendlich vielen Erzeugungen durch Translation von Kurven; Leipzig 1894 bei Julius Klinkhardt) und bei Scheffers (Theorie der Flächen, 3. Auflage, Berlin und Leipzig S. 322) als „die Scherksche Minimalfläche" bezeichnet.

Wir betrachten nun zwei Ebenenfolgen, deren Ebenen parallel zu den Diagonalen des Rechtecksnetzes verlaufen und einander in den Geraden der beiden Geradensysteme schneiden, also auf der (x, y)-Ebene senkrecht stehen. Diese beiden Ebenenfolgen schneiden sich unter dem Winkel 2γ und unterteilen den Raum in ∞^2 kongruente rhombische Prismen, die sich in Richtung der z-Achse nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken. Es gibt zwei Sorten solcher Prismen: Die eine Sorte

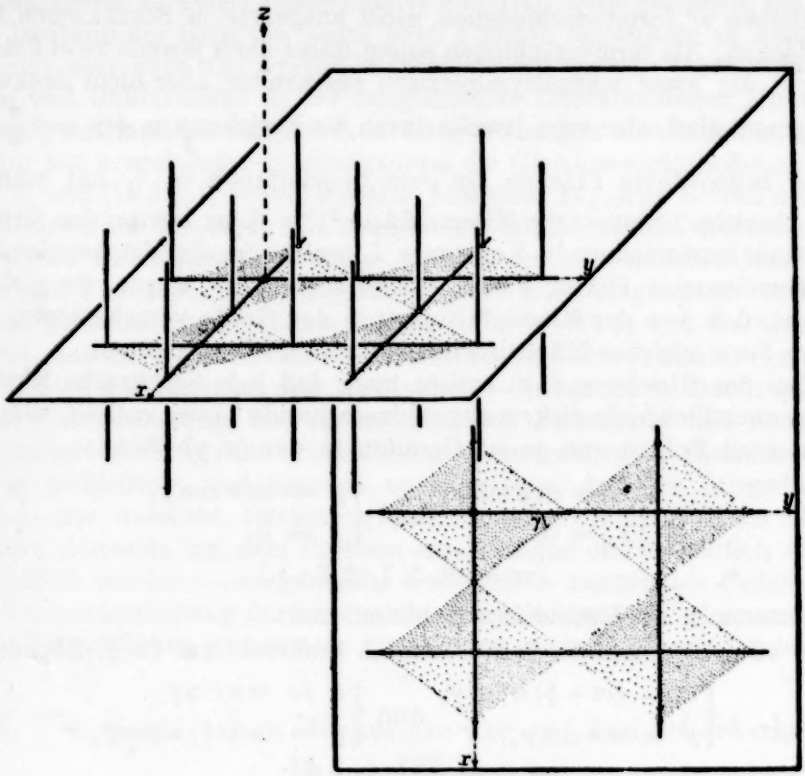


Fig. 1.

Fig. 1 gibt eine Veranschaulichung des Geradengefüges auf einer Scherkschen Fläche. Bei der angegebenen Darstellung im Schrägriß ist die Zeichenebene parallel zur (y, z)-Ebene gewählt und als Verkürzung in der x-Richtung $^2/_3$ angenommen. Der Darstellung liegt als Beispiel die Fläche mit der Konstanten $\gamma = \text{arc tg } ^3/_4$ zugrunde. Die (x, y)-Ebene, die Trägerebene des aus Flächengeraden bestehenden Rechtecksnetzes, ist als rechteckige, undurchsichtige Tafel gezeichnet und zwar sowohl in waagerechter als auch — in die Zeichenebene heruntergeklappt — in lotrechter Stellung. Von dem Gefüge der Flächengeraden sind als dicke Linien dargestellt: 4 Geraden des Rechtecksnetzes in der (x, y)-Ebene und 12 Geraden der beiden Systeme von Senkrechten zur (x, y)-Ebene. Ferner sind die Rhombenfelder hervorgehoben, in welchen die Prismen die (x, y)-Ebene schneiden, und zwar in dunkler oder heller Tönung, je nachdem die Fläche im Halbraum darüber oder darunter liegt.

umfaßt die Prismen, in deren Innerem sich die Geraden des Rechtecksnetzes kreuzen, die andere Sorte die übrigbleibenden Prismen. Die beiden Prismensorten werden von der (x, y)-Ebene nach den beiden Sorten von Rautenfeldern eines gewöhnlichen Rautenmusters geschnitten. Da die beiden Ebenenfolgen durch die Gleichungen

$$\frac{x}{\sin\gamma} - \frac{y}{\cos\gamma} = (m+\tfrac{1}{2})\pi \quad \text{und} \quad \frac{x}{\sin\gamma} + \frac{y}{\cos\gamma} = (m+\tfrac{1}{2})\pi$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dargestellt werden, und da in der Gleichung (1a) der Scherkschen Flächen die linke Seite stets positiv ist und deshalb der Zähler und der Nenner auf der rechten Seite das gleiche Vorzeichen haben müssen, ergibt eine einfache Betrachtung: Die Scherksche Minimalfläche liegt ganz innerhalb derjenigen Prismen, in deren Innerem sich die Geraden des Rechtecksnetzes schneiden und sie erreicht die Begrenzungsebenen der Prismen für unendlich große (positive oder negative) Werte ihrer z-Koordinaten; die Prismen der anderen Prismensorte enthalten in ihrem Inneren keine Punkte der Fläche. Die Projektion der Fläche auf die (x, y)-Ebene füllt den Rhombus, in welchem das Prisma diese Ebene schneidet, einschließlich seiner Berandung vollständig aus. Alle diese prismatischen Ausschnitte aus der Gesamtfläche sind untereinander kongruent („doppelt periodische" Fläche), im Endlichen frei von Singularitäten und hängen längs der Kanten der einzelnen Prismen ebenfalls singularitätenfrei miteinander zusammen. Aus der Gleichung (1b) ersieht man weiterhin, daß für jeden prismatischen Ausschnitt aus der Gesamtfläche Axialsymmetrie besteht bezüglich der in der (x, y)-Ebene gelegenen Flächengeraden, die Fläche also zur Hälfte über und zur Hälfte unter der (x, y)-Ebene verläuft und somit die Gestalt einer Sattelfläche hat[11]).

2. Die Scherkschen Minimalflächen als Trägerflächen von Rückungsnetzen aus ebenen Kurven.

Die Gleichung (1a) oder (1b) der Scherkschen Flächen geht durch die Substitution

$$2\bar{u} = \frac{x}{\sin\gamma} + \frac{y}{\cos\gamma}, \quad 2\bar{v} = \frac{x}{\sin\gamma} - \frac{y}{\cos\gamma}$$

über in

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \bar{u} + \bar{v}, \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \bar{u} - \bar{v}, \\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,(\mathrm{tg}^2\,\bar{u}) - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,(\mathrm{tg}^2\,\bar{v}). \end{cases}$$

[11]) Die in Anm. [10]) angegebenen Arbeiten von Kummer und Scheffers enthalten eine Beschreibung der gleichseitigen Scherkschen Minimalfläche und einige Bemerkungen über die auf ihr gelegenen Rückungsnetze.

Zur Untersuchung des $(\bar{u}, \bar{v})$-Netzes, auf welches die Scherksche Fläche jetzt bezogen ist, greifen wir zunächst aus der Gesamtfläche nur einen der ∞^2 kongruenten prismatischen Ausschnitte, die wir künftig kurz „Rhombenausschnitte" nennen wollen, heraus. Wir setzen für die Koordinaten x bzw. y an Stelle der Schranken $\pm\infty$ des Gesamtbereiches jetzt $\pm\frac{\pi}{2}\sin\gamma$ bzw. $\pm\frac{\pi}{2}\cos\gamma$, betrachten also denjenigen Rhombenausschnitt unserer Fläche, welcher den Koordinatenursprung als Prismenmittelpunkt enthält. Die Netzkurven dieses Rhombenausschnitts sind eben, scharweise kongruent und parallelgestellt zu den Ebenen des Prismas. Die Gleichungen (2) stellen also ein Rückungsnetz aus ebenen Kurven dar, welches für alle Parameterwerte von $-\frac{\pi}{4}$ bis $+\frac{\pi}{4}$ den ganzen Rhombenausschnitt überspannt.

Um eine genauere Vorstellung von diesem Rückungsnetz zu erhalten, betrachten wir die Netzkurven $\bar{v} = 0$ und $\bar{u} = 0$, welche sich im Koordinatensprung schneiden. Ihre Gleichungen, bezogen auf ein $(\bar{u}, z)$- bzw. $(\bar{v}, z)$-Achsenkreuz, das aus dem (y, z)-Aehsenkreuz durch Schwenkung um den Winkel $+\gamma$ bzw. $-\gamma$ hervorgegangen ist, lauten:

$$\mathfrak{Tg}\, z = \operatorname{tg}^2 \bar{u}, \qquad \mathfrak{Tg}\, z = -\operatorname{tg}^2 \bar{v}.$$

Dies sind zwei ebene kongruente Kurven, welche beide die z-Achse als Symmetrieachse und — im Abstand $\pm\frac{\pi}{4}$ hiervon — je ein Parallelenpaar als Asymptoten besitzen; beide Kurven berühren die (x, y)-Ebene, die eine verläuft aber (nach oben geöffnet) nur oberhalb, die andere (nach unten geöffnet) nur unterhalb dieser Ebene. Aus der Lage und Form dieser beiden Kurven, die — parallel aneinander verschoben — Rückungsnetz und fläche erzeugen, läßt sich unmittelbar die sattelförmige Flächenform des Rhombenausschnittes erkennen.

Wir bestimmen nun aus der Darstellung (2) für die beiden Scharen ebener Netzkurven unseres $(\bar{u}, \bar{v})$-Rückungsnetzes die Bogenlängenfunktionen[12]):

$$\bar{s}_1 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{u}}{1 - \operatorname{tg}^2 \bar{u}}, \qquad \bar{s}_2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \bar{v}}{1 - \operatorname{tg}^2 \bar{v}}.$$

Durch neue Anordnung der Netzkurven gemäß

$$\bar{s}_1 \bar{u}' = u', \qquad \bar{s}_2 \bar{v}' = v',$$

d. h.

$$\bar{u} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\, u), \qquad \bar{v} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\, v),$$

verwandeln wir das $(\bar{u}, \bar{v})$-Rückungsnetz in ein rhombisches (u, v)-

[12]) vgl. Teil I, S. 196. Bei den Veränderlichen bedeutet der Strich ′ durchwegs Ableitung nach dem jeweiligen Argument.

Rückungsnetz aus ebenen Kurven; seine Gleichungen lauten:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\,u) + \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\,v) \\ \qquad\quad = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Sin}(u+v) : \mathfrak{Cof}(u-v)), \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\,u) - \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Tg}\,v) \\ \qquad\quad = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Sin}(u-v) : \mathfrak{Cof}(u+v)), \\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\mathfrak{Tg}^2 u) - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\mathfrak{Tg}^2 v) \\ \qquad\quad = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\mathfrak{Tg}(u+v)\cdot\mathfrak{Tg}(u-v)), \end{cases}$$
$$\left(-\infty < \frac{u}{v} < +\infty\right)$$

wobei jetzt die Parameter u und v alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durch laufen. Bei der Darstellung (3) des Rückungsnetzes fällt somit — ebenso wie bei der Darstellung (2) — der Parameterursprung $u = v = 0$ mit dem Koordinatenursprung $x = y = z = 0$ zusammen.

Das soeben beschriebene Rückungsnetz aus ebenen Kurven ist wegen der zunächst angesetzten Beschränkung der Koordinaten x und y nur erklärt für den einen Rhombenausschnitt, welcher den Koordinatenursprung enthält. Aus dem Auftreten der unendlich vieldeutigen arc tg-Funktion in den Gleichungen (3) geht jedoch hervor, daß auf der durch diese Gleichungen bei unbeschränkten Koordinaten dargestellten gesamten Fläche in jedem einzelnen ihrer ∞^2 Rhombenausschnitte ein derartiges (sich von Ausschnitt zu Ausschnitt kongruent wiederholendes) Rückungsnetz aus ebenen Kurven vorhanden ist.

3. Die Scherkschen Minimalflächen als Trägerflächen von Rückungsnetzen aus gewundenen Kurven.

Bei der Bestimmung der Rückungsnetze aus gewundenen Kurven fragen wir — im Verfolg der einleitend gemachten Angaben — zunächst nach den Netzumhüllenden, d. s. die Schmiegtangentenkurven der Fläche. Wir bestimmen diese Kurven, indem wir für unser rhombisches (u, v)-Rückungsnetz aus ebenen Kurven, dargestellt durch die Gleichungen (3), die beiden Diagonalkurvenscharen[13]) aufsuchen; die Transformation

$$u - v = \alpha, \qquad u + v = \beta$$

liefert ein rechteckiges (α, β)-Kurvennetz aus den Schmiegtangentenkurven der Scherkschen Fläche in der Darstellung

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Sin}\,\beta : \mathfrak{Cof}\,\alpha), \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}(\mathfrak{Sin}\,\alpha : \mathfrak{Cof}\,\beta), \\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\mathfrak{Tg}\,\alpha\cdot\mathfrak{Tg}\,\beta). \end{cases}$$
$$\left(-\infty < \frac{\alpha}{\beta} < +\infty\right)$$

[13]) vgl. Teil I, S. 204.

Für jedes der gesuchten ∞^2 Rückungsnetze aus gewundenen Kurven sind, wie eingangs erwähnt, die Netzkurven gestaltlich völlig bestimmt durch die ihnen ähnliche jeweilige Netzumhüllende, also durch eine Kurve der Schar $\alpha = \text{konst.}$ oder der Schar $\beta = \text{konst.}$ Weil aber, wie sich alsbald zeigen wird, die Kurven $\alpha = \text{konst.}$ überall rechtsgewunden und die Kurven $\beta = \text{konst.}$ überall linksgewunden sind, können wir — diesen Merkmalen der beiden Schmiegtangentenkurvenscharen entsprechend — zwei Mannigfaltigkeiten von Rückungsnetzen unterscheiden:

α) *Rückungsnetze aus rechtsgewundenen Kurven.*

Um für die Einhüllende $\alpha = \text{konst.}$ eines beliebig herausgegriffenen Netzes aus rechtsgewundenen Kurven leicht übersehbare Aussagen machen zu können, wollen wir zunächst von der Periodizität in der y-Richtung absehen und uns dementsprechend auf einen y-Bereich zwischen $\pm \frac{\pi}{4} \cos\gamma$ beschränken; der dadurch betrachtete Bereich der Scherkschen Fläche umfaßt die Reihe aller Rhombenausschnitte entlang der x-Achse. Legt man jetzt in Richtung dieser Achse durch die Kurve $\alpha = \text{konst.}$ einen Zylinder

$$\mathfrak{Cof}\, z = \mathfrak{Cof}\,\alpha \cdot \cos\frac{y}{\cos\gamma}, \tag{5}$$

welcher ja auch die Kurve $\alpha = -\text{konst.}$ enthalten muß, dann können bezüglich dieses Zylinders und der beiden Kurven $\alpha = \pm \text{konst.}$ folgende einfache Aussagen gemacht werden:

Der Zylinder besitzt als Querschnitt eine ovale, zur y- und z-Achse symmetrische Kurve (große Halbachse $= \alpha$, kleine Halbachse $= \cos\gamma \cdot \operatorname{arc\,sin}\mathfrak{Tg}\,\alpha$) und als Mittelachse die x-Achse, also eine Gerade auf unserer Scherkschen Fläche. Die beiden Kurven $\alpha = \pm \text{konst.}$ liegen axialsymmetrisch zu dieser Achse, sind somit kongruent. Sie umlaufen den Ovalzylinder in unendlich vielen rechtsgängigen Windungen, den Drahtwindungen einer Doppeldrahtspule um einen ovalzylindrischen Kern vergleichbar, und erstrecken sich nach beiden Seiten ins Unendliche. Dabei durchdringt jede der beiden Kurven die sämtlichen Rhombenausschnitte der betrachteten Reihe und zwar so, daß die Flächengeraden, in welchen die Rhombenausschnitte aneinanderstoßen, senkrecht geschnitten werden; dies geschieht jeweils nach einem halben Umlauf um die x-Achse.

Wir bestimmen nunmehr dasjenige Rückungsnetz aus gewundenen Kurven auf unserer Scherkschen Fläche, welches die Schmiegtangentenkurve $\alpha = \text{konst.}$ zur Hüllkurve hat. Für die Herleitung der Netzgleichungen ist es zweckmäßig, an Stelle der Konstanten α jetzt mittels der Beziehungen

$$\alpha = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,k = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{1}{k'} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{k}{k'} \tag{6}$$

zwei Größen k und k' einzuführen; diese sind durch die Gleichung

$k^2 + k'^2 = 1$ verknüpft und liegen für $0 < |a| < \infty$ in den Intervallen $0 < |k| < 1$ bzw. $0 < k' < 1$. Ferner setzen wir abkürzend für

$$\sin^2\gamma + k^2 \cos^2\gamma = a^2.$$

Die Gleichungen der herausgegriffenen Schmiegtangentenkurve $a = \text{konst.}$ schreiben sich dann folgendermaßen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}(k' \cdot \mathfrak{Sin}\,\beta), \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{k}{k'} : \mathfrak{Cof}\,\beta\right), \\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(k \cdot \mathfrak{Tg}\,\beta). \end{cases}$$

$$(-\infty < \beta < +\infty)$$

Wir wollen nun auf dieser Schmiegtangentenkurve zwei beliebige Punkte betrachten und die zugehörigen Parameter mit $\beta = \tilde{u}$ und $\beta = \tilde{v}$ bezeichnen. Der Mittelpunkt der Verbindungssehne hat dann folgende Koordinaten:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{2}\{\operatorname{arc\,tg}(k' \cdot \mathfrak{Sin}\,\tilde{u}) + \operatorname{arc\,tg}(k' \cdot \mathfrak{Sin}\,\tilde{v})\}, \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \dfrac{1}{2}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{k}{k'} : \mathfrak{Cof}\,\tilde{u}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{k}{k'} : \mathfrak{Cof}\,\tilde{v}\right)\right\}, \\ z = \dfrac{1}{2}\{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(k \cdot \mathfrak{Tg}\,\tilde{u}) + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(k \cdot \mathfrak{Tg}\,\tilde{v})\}. \end{cases}$$

Für alle möglichen Werte von $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ stellen die Gleichungen (8) ein Rückungsnetz dar, dessen sämtliche Netzkurven kongruent und parallelgestellt sind. Jede Netzkurve ist dabei halb so groß wie die Schmiegtangentenkurve und ihr parallelgestellt; ferner berührt sie — als Ort der Mittelpunkte aller von einem festen Punkt der Schmiegtangentenkurve ausgehenden Sehnen — die Schmiegtangentenkurve in dem betrachteten Punkt. Bei dem durch die Gleichungen (8) dargestellten Kurvennetz handelt es sich also in der Tat um ein Rückungsnetz aus gewundenen Kurven auf unserer Scherkschen Fläche. Eine formelmäßige Bestätigung dieser Aussage ergäbe sich schließlich noch durch Einsetzen der neugewonnenen Netzgleichungen (8) in die Flächengleichung (1a) oder (1b), wobei an Stelle von (8) bequemer die später daraus durch Umformung erhaltenen Netzgleichungen (10) verwendet werden können.

Da unsere Scherksche Fläche zur x-Achse symmetrisch ist, hat das erhaltene Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven neben der Schmiegtangentenkurve $a = \text{konst.}$ auch die Schmiegtangentenkurve $a = -\text{konst.}$ zur Hüllkurve; diese beiden Kurven sind aber auch die Ränder des von unserem Ovalzylinder (5) aus der Gesamtfläche ausgeschnittenen Flächenbereiches. Hieraus ersieht man, daß der bezeichnete

Flächenbereich, den wir kurz „Ovalausschnitt" nennen wollen, von unserem Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven vollständig überspannt wird und sich dabei, einem korkzieherartig gewundenen Flächenband ungleicher Breite vergleichbar, längs der x-Achse nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt.

Wir bestimmen jetzt aus der Darstellung (8) für die beiden Scharen rechtsgewundener Netzkurven unseres $(\tilde{u}, \tilde{v})$-Rückungsnetzes die Bogenlängenfunktionen:

$$\tilde{s}_1 = \frac{a/_2}{\sqrt{1 + k'^2 \operatorname{Sin}^2 \tilde{u}}}, \qquad \tilde{s}_2 = \frac{a/_2}{\sqrt{1 + k'^2 \operatorname{Sin}^2 \tilde{v}}}.$$

Durch neue Anordnung der Netzkurven gemäß

$$\tilde{s}_1 \tilde{u}' = u', \qquad \tilde{s}_2 \tilde{v}' = v'$$

verwandeln wir das $(\tilde{u}, \tilde{v})$-Rückungsnetz in ein rhombisches (u, v)-Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven. Zwecks Auflösung dieser Transformationsformeln nach $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ setzen wir für einen Augenblick

$$\tilde{s}_1 \tilde{u}' = \frac{a/_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = u', \qquad \tilde{s}_2 \tilde{v}' = \frac{a/_2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = v'.$$

Hieraus kann dann — bei geeigneter Wahl des neuen Parameterursprungs — einerseits

$$\operatorname{arc\,tg}(k' \operatorname{Sin} \tilde{u}) = \varphi - \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arc\,tg}(k' \operatorname{Sin} \tilde{v}) = \psi + \frac{\pi}{2},$$

d. h. $$\tilde{u} = \operatorname{Ar\,Tg} \frac{-\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \tilde{v} = \operatorname{Ar\,Tg} \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

und andererseits

$$\varphi = \operatorname{am} \frac{2u}{a}, \qquad \psi = \operatorname{am} \frac{2v}{a}$$

gefolgert werden. Durch Einsetzen in die Gleichungen (8) und Verwendung elliptischer Funktionen erhalten wir schließlich die Gleichungen des rhombisch angeordneten Rückungsnetzes aus rechtsgewundenen Kurven:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin \gamma} = \dfrac{1}{2}\left\{\operatorname{am} \dfrac{2u}{a} + \operatorname{am} \dfrac{2v}{a}\right\}, \\ \dfrac{y}{\cos \gamma} = \dfrac{1}{2}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left(k \cdot \operatorname{sn} \dfrac{2u}{a} : \operatorname{dn} \dfrac{2u}{a}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(k \cdot \operatorname{sn} \dfrac{2v}{a} : \operatorname{dn} \dfrac{2v}{a}\right)\right\}, \\ z = -\dfrac{1}{2}\left\{\operatorname{Ar\,Tg}\left(k \cdot \operatorname{cn} \dfrac{2u}{a} : \operatorname{dn} \dfrac{2u}{a}\right) - \operatorname{Ar\,Tg}\left(k \cdot \operatorname{cn} \dfrac{2v}{a} : \operatorname{dn} \dfrac{2v}{a}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen bringen wir noch durch einfaches Umschreiben auf die

folgende Form:

$$(10)\quad\begin{cases}\dfrac{x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{u}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u}{a}:\operatorname{cn}\dfrac{u}{a}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{v}{a}:\operatorname{cn}\dfrac{v}{a}\right)\\ \quad = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{u-v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u+v}{a}:\operatorname{cn}\dfrac{u+v}{a}\right),\\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(k\cdot\operatorname{cn}\dfrac{u}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u}{a}:\operatorname{dn}\dfrac{u}{a}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(k\cdot\operatorname{cn}\dfrac{v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{v}{a}:\operatorname{dn}\dfrac{v}{a}\right)\\ \quad = \operatorname{arc\,tg}\left(k\cdot\operatorname{cn}\dfrac{u+v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u-v}{a}:\operatorname{dn}\dfrac{u-v}{a}\right),\\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(k\cdot\operatorname{sn}^2\dfrac{u}{a}\right)-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(k\cdot\operatorname{sn}^2\dfrac{v}{a}\right)\\ \quad = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(k\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u+v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{u-v}{a}\right),\\ \qquad\left(-\infty<\begin{matrix}u\\v\end{matrix}<+\infty\right)\end{cases}$$

wobei $a = +\sqrt{\sin^2\gamma + k^2\cos^2\gamma}$ ist.

Bei dieser Darstellung des Rückungsnetzes aus rechtsgewundenen Kurven fällt wieder der Parameterursprung $u = v = 0$ mit dem Koordinatenursprung $x = y = z = 0$ zusammen.

Das soeben beschriebene Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven (gekennzeichnet durch einen festen Betrag der Konstanten k) ist wegen der zunächst angesetzten Beschränkung der Koordinate y nur erklärt für die e i n e Reihe von Rhombenausschnitten längs der x-Achse und erstreckt sich dabei über den hierzu gehörigen (durch das gewählte k bemessenen) Ovalausschnitt längs dieser Achse. Aus dem Auftreten der unendlich vieldeutigen arc tg-Funktion in den Gleichungen (10) geht jedoch hervor, daß bei unbeschränkter Koordinate y das (durch k festgelegte) Rückungsnetz sich unendlich oft kongruent wiederholt; die Wiederholung erfolgt dabei in ∞^1 noch weiter vorhandenen „Ovalausschnitten", das soll heißen Flächenbereichen, welche durch lauter parallelgestellte Ovalzylinder mit gleicher Querschnittsform und mit den ∞^1 diskreten, zur x-Achse parallelen Flächengeraden als Zylinderachsen aus der Gesamtfläche ausgeschnitten werden.

Läßt man schließlich die Konstante k alle möglichen Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen, so liefern die Gleichungen (10) sämtliche (in kontinuierlicher Mannigfaltigkeit vorhandenen) ∞^1 Rückungsnetze aus rechtsgewundenen Kurven[14]). Dabei überspannt jedes einzelne Rückungsnetz sämtliche (in diskreter Mannigfaltigkeit vorhandenen) ∞^1 kongruenten

[14]) Die gewundenen Netzkurven und ihre doppelt so großen Hüllkurven haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß das Produkt aus der Kurvenwindung und dem Quadrat der Kurvenkrümmung eine Konstante ist. Diese beträgt für die rechts- bzw. linksgewundenen Hüllkurven

$$\frac{k^2(1-k^2)\sin\gamma\cos\gamma}{a^6}\quad\text{bzw.}\quad\frac{-l^2(1-l^2)\sin\gamma\cos\gamma}{b^6}.$$

Ovalausschnitte, welche die x-Achse und die zu ihr parallelen Flächengeraden als Achsen haben.

β) Rückungsnetze aus linksgewundenen Kurven.

Zur Bestimmung der Rückungsnetze aus linksgewundenen Kurven hat man statt von einer Schmiegtangentenkurve $\alpha = \text{konst.}$ von einer solchen $\beta = \text{konst.}$ als Netzumhüllenden auszugehen. Setzt man analog

$$\beta = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,l \qquad (0 < |l| < 1)$$

und ferner wieder abkürzend

$$\cos^2\gamma + l^2 \sin^2\gamma = b^2,$$

so liefern ganz entsprechende Betrachtungen die Gleichungen des rhombisch angeordneten Rückungsnetzes aus linksgewundenen Kurven[15]):

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(l \cdot \operatorname{cn}\dfrac{u}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u}{b} : \operatorname{dn}\dfrac{u}{b}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(l \cdot \operatorname{cn}\dfrac{v}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{v}{b} : \operatorname{dn}\dfrac{v}{b}\right) \\ \qquad = \operatorname{arc\,tg}\left(l \cdot \operatorname{cn}\dfrac{u-v}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u+v}{b} : \operatorname{dn}\dfrac{u+v}{b}\right), \\ \dfrac{y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{u}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u}{b} : \operatorname{cn}\dfrac{u}{b}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{v}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{v}{b} : \operatorname{cn}\dfrac{v}{b}\right) \\ \qquad = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{u+v}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u-v}{b} : \operatorname{cn}\dfrac{u-v}{b}\right), \\ z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(l \cdot \operatorname{sn}^2\dfrac{u}{b}\right) - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(l \cdot \operatorname{sn}^2\dfrac{v}{b}\right) \\ \qquad = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(l \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u+v}{b} \cdot \operatorname{sn}\dfrac{u-v}{b}\right). \end{cases}$$

$$\left(-\infty < \frac{u}{v} < +\infty\right)$$

---

15) Während die Untersuchungen von Lie (vgl. Anm. 5) sich hauptsächlich mit der Existenz von Rückungsnetzen aus ebenen und gewundenen Kurven auf den Scherkschen Flächen beschäftigen, hat Stäckel versucht, die Netzgleichungen explizit anzugeben. Doch sind in den beiden von Stäckel über diesen Gegenstand veröffentlichten Arbeiten (Bestimmung aller Kurven, durch deren Translation Minimalflächen entstehen, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse [1905], Heft 4; Die kinematische Erzeugung von Minimalflächen I, Transactions of American mathematical Society, 7 [1906], S. 293), wovon die erste einen grundlegenden, von Scheffers (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse [1905], Heft 5) kritisierten und von Stäckel in der zweiten Arbeit „berichtigten" Irrtum enthält, die Netzgleichungen unrichtig angegeben. Denn die bei Stäckel unterschiedenen beiden Netzmannigfaltigkeiten (S_1) *und* (S_3) umfassen tatsächlich nur e i n e Netzmannigfaltigkeit, da sie durch die Parametertransformation $\bar{v}^* = \bar{v} - \pi$ und die Parallelverschiebung $x^* = x - \pi \sin\gamma$, $y^* = y + \ln(1+\lambda) - \ln(1-\lambda)$, $z^* = z$ ineinander übergeführt werden können.

Diese Gleichungen können formal rechnerisch aus den Gleichungen (10) erhalten werden, wenn man gleichzeitig ersetzt: x durch y, y durch x, γ durch $\frac{\pi}{2} - \gamma$, a durch β, k durch l, a durch b, v durch $-v$. Berücksichtigt man dies und ersetzt noch das Wort „rechtsgewunden" durch „linksgewunden", so gelten auch alle oben gemachten Aussagen über die Gestalt der Rückungsnetze aus rechtsgewundenen Kurven unverändert für die Rückungsnetze aus linksgewundenen Kurven.

Läßt man die Konstante l alle möglichen Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen, so liefern die Gleichungen (11) sämtliche (in kontinuierlicher Mannigfaltigkeit vorhandenen) ∞^1 Rückungsnetze aus linksgewundenen Kurven[14]). Dabei überspannt jedes einzelne Rückungsnetz sämtliche (in diskreter Mannigfaltigkeit vorhandenen) ∞^1 kongruenten Ovalausschnitte, welche die y-Achse und die zu ihr parallelen Flächengeraden als Achsen haben.

4. Zusammenhang und Ausartung der verschiedenartigen Rückungsnetze auf einer beliebigen Scherkschen Minimalfläche.

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die sämtlichen auf einer beliebigen Scherkschen Fläche vorhandenen rhombischen Rückungsnetze bestimmt; hierbei ergaben sich: ein Netz aus ebenen Kurven, dargestellt durch die Gleichungen (3), sowie zwei Mannigfaltigkeiten von je ∞^1 Netzen aus gewundenen Kurven, die wir nach dem Windungssinn der Netzkurven — Rechts- bzw. Linkswindung — unterschieden haben. Die Gleichungen (10) bzw. (11) dieser Netzmannigfaltigkeiten enthalten — im Gegensatz zur Gleichung (3) — außer der Flächenkonstanten γ noch die Netzkonstanten k bzw. l als Netzparameter (zugleich als jeweiligen Modul der in die Gleichungen eingehenden elliptischen Funktionen). Die Frage nach Form und Bereich der einzelnen Netze, die ja durch den jeweiligen Betrag von k bzw. l gekennzeichnet sind, ist bisher nur für Netze innerhalb des Wertebereiches $0 < |k| < 1$ und $0 < |l| < 1$ dieser Konstanten besprochen worden; sie soll jetzt auch für die zu $k \to 0$ bzw. $l \to 0$ und $|k| \to 1$ bzw. $|l| \to 1$ gehörigen Netze beantwortet werden.

$k \to 0$ bzw. $l \to 0$. Netz und Bereich arten in lauter Einzelgerade aus, nämlich in die zur x-Achse bzw. y-Achse parallelen Flächengeraden. Wie man aus den Netzgleichungen (10) bzw. (11) abliest, kommt diese Ausartung dadurch zustande, daß die einzelnen Ovalzylinder, welche die Netze begrenzen, auf ihre Mittelachsen zusammenschrumpfen.

$|k| \to 1$ bzw. $|l| \to 1$. Hier treten an die Stelle der rechts- bzw. linksgewundenen Kurven unseres Rückungsnetzes jetzt überall ebene Kurven; in beiden Fällen erhalten wir, wie sich wegen

$$\mathrm{sn} \to \mathfrak{Tg}, \quad \mathrm{cn} \to 1/\mathfrak{Cof}, \quad \mathrm{dn} \to 1/\mathfrak{Cof}; \qquad a \to 1, \quad b \to 1$$

sofort aus den Netzgleichungen (10) bzw. (11) ergibt, das durch die

Gleichung (3) dargestellte rhombische Rückungsnetz aus ebenen Kurven. Jeder einzelne Ovalzylinder wird dabei „unendlich flach" und artet in ein Paar paralleler Ebenen aus. Alle diese Ebenen sind parallel zur x-Achse bzw. y-Achse und enthalten je ein System der auf der (x, y)-Ebene senkrecht stehenden diskreten Flächengeraden.

Unser Rückungsnetz aus ebenen Kurven erscheint sonach als *„Übergangsgebilde"* der beiden Mannigfaltigkeiten von Rückungsnetzen aus gewundenen Kurven, deren Rechts- bzw. Linkswindung bei diesem Übergang verschwindet.

5. Bildmäßige Darstellung der Bereiche der verschiedenen Rückungsnetze auf einer Scherkschen Minimalfläche.

Fig. 2 gibt eine Veranschaulichung der Netzbereiche für die Rückungsnetze aus ebenen und aus gewundenen Kurven auf einer SCHERKschen Minimalfläche. Dabei ist die als Beispiel ausgewählte Fläche. ($\gamma = \text{arc tg } {}^3/_4$) und ihre Darstellung (Schrägriß) die nämliche wie in Fig. 1. In drei getrennten, untereinander stehenden Bildern sind drei netztragende Ausschnitte der Fläche dargestellt und zwar:

Im oberen Bild: Ein Rhombenausschnitt; er enthält hier den Koordinatenursprung.

Im mittleren Bild: Ein Ovalausschnitt in y-Richtung (zur Konstanten $k = {}^4/_5$ gehörig); er enthält hier die y-Achse selbst.

Im unteren Bild: Ein Ovalausschnitt in x-Richtung (zur Konstanten $l = {}^4/_5$ gehörig); er enthält hier die x-Achse selbst.

Von allen drei Ausschnitten wurde noch ein gemeinsamer Lotriß in einer Tafel senkrecht zur z-Achse dargestellt, ferner von den beiden Ovalausschnitten je ein Lotriß in einer Tafel senkrecht zur y- bzw. x-Achse. Da im Beispiel $k = l$ angenommen ist, besitzen die beiden Ovale dieser Lotrisse gleichlange große Achsen, aber (wegen $\gamma \neq \pi/4$) ungleichlange kleine Achsen.

Die in Wirklichkeit in der $\pm z$ Richtung unbegrenzte „Sattelfläche" des Rhombenausschnitts ist in der Darstellung durch zwei Ebenen parallel zur (x, y)-Ebene begrenzt. Entsprechend ist von den beiden, in Wirklichkeit unendlich langen, „gewundenen Flächenbändern" der Ovalauschnitte nur je das Teilstück gezeichnet, welches zwei Windungen des Flächenbereiches umfaßt, durch Flächengerade parallel zur z-Achse begrenzt ist und in dem Rhombenausschnitt um den Koordinatenursprung und den in der positiven x- bzw. y-Achse anstoßenden Rhombenausschnitten gelegen ist.

In den drei Flächenausschnitten sind die sämtlichen Flächengeraden angegeben. Ferner ist derjenige Flächenbereich, der den drei betrachteten Flächenausschnitten zugleich angehört, in allen drei Bildern durch Tönung hervorgehoben; der Rand dieses gemeinsamen Flächenbereiches ist ein krummliniges, räumliches Viereck.

In der Darstellung sind alle Kurven und Geraden a u f den Flächenausschnitten, im Gegensatz zu den Randkurven, Randgeraden und Umrißkurven, als dünne Linien angegeben.

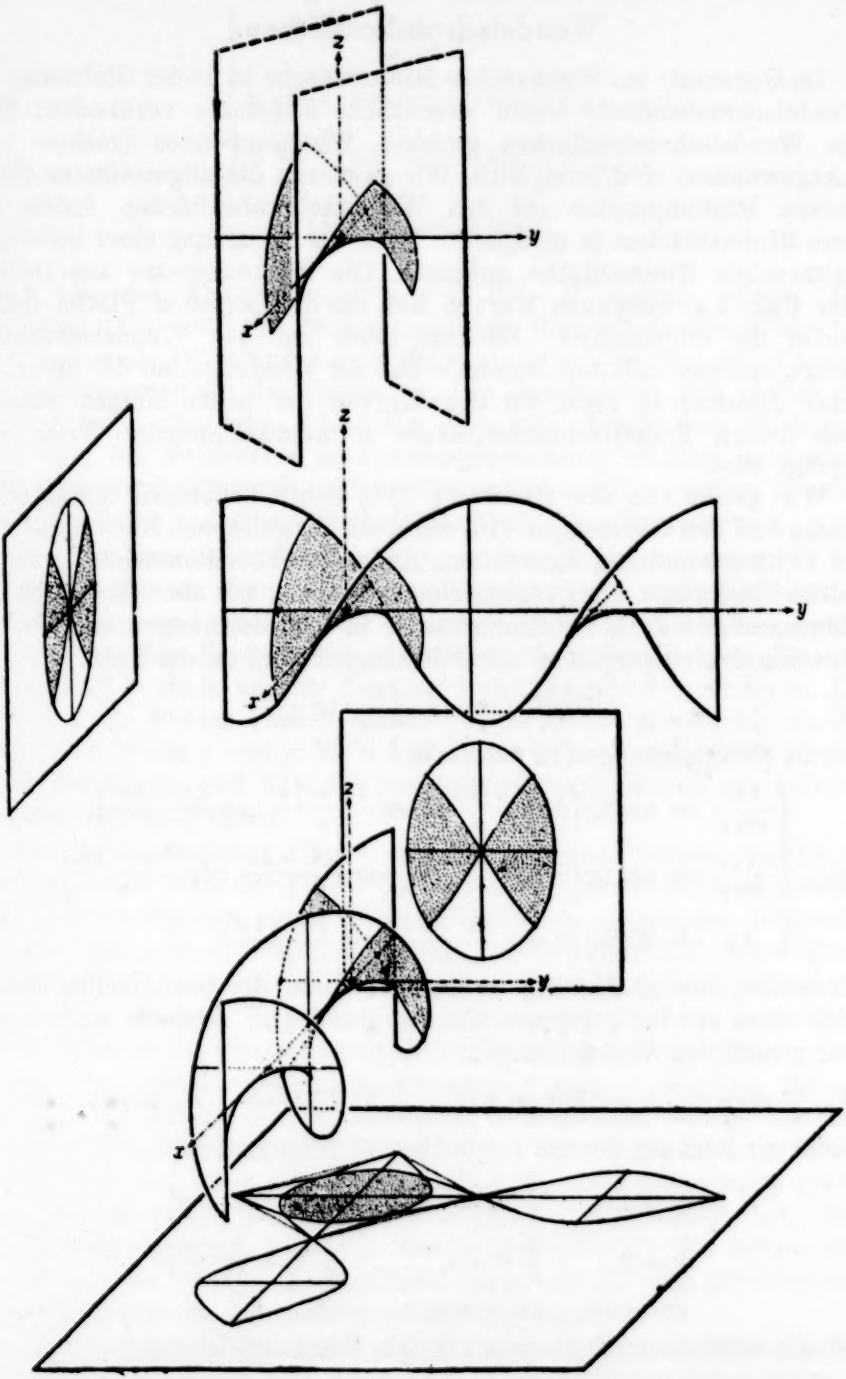


Fig. 2.

III. Die rhombischen Rückungsnetze auf den Wendelschraubenflächen.

Im Gegensatz zur Scherkschen Minimalfläche ist in der Gleichung der Wendelschraubenfläche keine wesentliche Konstante vorhanden; denn alle Wendelschraubenflächen gleichen Windungssinnes (rechts- bzw. linksgewunden) sind formgleich. Wir gewinnen die allgemeinsten rhombischen Rückungsnetze auf den Wendelschraubenflächen, indem wir diese Minimalflächen in geeigneter Weise als Ausartung einer beliebigen Scherkschen Minimalfläche auffassen. Die Rückungsnetze aus (rechts- oder links-) gewundenen Kurven auf der Scherkschen Fläche liefern hierbei die allgemeinsten Rückungsnetze auf den Wendelschraubenflächen und zwar mit dem Ergebnis, daß der Windungssinn der ursprünglichen Netzkurven nicht nur den Kurven des neuen Netzes, sondern auch dessen Träger(schrauben)fläche in kennzeichnender Weise aufgeprägt wird.

Wir gehen von der Gleichung (1b) einer beliebigen Scherkschen Fläche und den Gleichungen (10) eines auf ihr gelegenen Rückungsnetzes aus rechtsgewundenen Kurven aus. Außer den Formkonstanten γ und k, welche Fläche bzw. Netz kennzeichnen, beziehen wir aber jetzt auch den Längenmaßstab λ als Größenkonstante in die Gleichungen mit ein; wir schreiben dementsprechend die Flächengleichung in der Form

$$\mathfrak{Tg}(\lambda z) = \operatorname{tg}\frac{\lambda x}{\sin\gamma}\cdot\operatorname{tg}\frac{\lambda y}{\cos\gamma} \tag{12}$$

und die Netzgleichungen in der Form

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda x}{\sin\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{dn}\dfrac{\lambda u-\lambda v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{\lambda u+\lambda v}{a}:\operatorname{cn}\dfrac{\lambda u+\lambda v}{a}\right), \\ \dfrac{\lambda y}{\cos\gamma} = \operatorname{arc\,tg}\left(k\cdot\operatorname{cn}\dfrac{\lambda u+\lambda v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{\lambda u-\lambda v}{a}:\operatorname{dn}\dfrac{\lambda u-\lambda v}{a}\right), \\ \lambda z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\left(k\cdot\operatorname{sn}\dfrac{\lambda u+\lambda v}{a}\cdot\operatorname{sn}\dfrac{\lambda u-\lambda v}{a}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Wir wollen nun gleichzeitig Größe und Form der Scherkschen Fläche sowie eines auf ihr gelegenen Netzes, also λ und γ bzw. k ändern und zwar gemäß den Verkopplungen:

$$\frac{1}{\lambda}\sin\gamma = h = \text{konst.} > 0, \quad \frac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,k = r = \text{konst.} > 0. \tag{14}$$

Gehen wir jetzt zur Grenze $\lambda \to 0$ über, so folgt zugleich

$$\begin{array}{lll} \gamma \to 0, & \dfrac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\lambda y) \to y, & \dfrac{1}{\lambda}\,\mathfrak{Tg}(\lambda z) \to z, \\ k \to 0, & \dfrac{1}{\lambda}\,k \to r, & \dfrac{1}{\lambda}\,a \to \sqrt{h^2+r^2}, \\ \operatorname{sn} \to \sin, & \operatorname{cn} \to \cos, & \operatorname{dn} \to 1 \end{array}$$

und wir erhalten an Stelle von (12) als Flächengleichung

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\frac{x}{h} \tag{15}$$

und an Stelle von (13) als Netzgleichungen

$$(16)\qquad \begin{cases} x = h \cdot \dfrac{u+v}{c}, \\ y = r \cdot \cos\dfrac{u+v}{c} \cdot \sin\dfrac{u-v}{c}, \\ z = r \cdot \sin\dfrac{u+v}{c} \cdot \sin\dfrac{u-v}{c}, \end{cases} \qquad \left(-\infty < \frac{u}{v} < +\infty\right)$$

wobei hier zur Abkürzung noch $c = \sqrt{h^2+r^2}$ gesetzt wurde. Die Gleichung (15) stellt die *rechtsgewundene Wendelschraubenfläche* mit der x-Achse als Achse und h als reduzierter Ganghöhe dar, wobei aber h nur Größenkonstante der Fläche ist. Die Gleichungen (16) stellen für $0 < r < \infty$ die sämtlichen ∞^1 auf ihr gelegenen rhombischen Rückungsnetze dar; die Netzkurven sind rechtsgewundene, exaxiale Schraubenlinien, die Netzhüllkurven sind jeweils zwei doppelt so große, koaxiale Schraubenlinien auf einem Drehzylinder mit dem Halbmesser r.

Zu einer Veranschaulichung des Grenzübergangs $\lambda \to 0$ gelangen wir, indem wir ihn an einem Ausgangsexemplar $\lambda = 1$ einer Scherkschen Fläche $\gamma = \gamma_1$ und eines auf ihr gelegenen Rückungsnetzes $k = k_1$ vornehmen; aus den Forderungen (14) folgt sofort für die neue Flächenkonstante $h = \sin\gamma_1$ und für die neue Netzkonstante $r = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, k_1$. Das Absinken des Wertes λ von 1 bis zur Grenze 0, dem gleichzeitig ein Absinken der Werte γ von γ_1 bis 0 und k von k_1 bis 0 entspricht, bewirkt dann, daß Fläche und Netz die nachfolgend beschriebenen gestaltlichen Veränderungen erfahren:

Bei der Scherkschen Fläche werden sämtliche Prismen, welche die Rhombenausschnitte der Fläche begrenzen, zunehmend flacher, behalten aber gleichzeitig den einen in der x-Richtung gemessenen diagonalen Durchmesser $\pi \sin\gamma_1$ (wegen $h =$ konst.) unverändert bei. Beim Grenzübergang arten dann die ∞^2 Prismen in ∞^1 Paare paralleler, zur x-Achse senkrechter Ebenen aus; aus der *doppelt-periodischen* Scherkschen Fläche wird so die *einfach-periodische* Wendelschraubenfläche.

Bei dem Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven auf der Scherkschen Fläche werden sämtliche Ovalzylinder, welche die netztragenden Ovalausschnitte der Scherkschen Fläche begrenzen, zunehmend runder, behalten aber den einen in der z-Richtung gemessenen großen Durchmesser $2\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\, k_1$ (wegen $r =$ konst.) unverändert bei. Beim Grenzübergang bleibt dann von den ∞^1 Ovalzylindern der Scherkschen Fläche nur ein einziger Kreiszylinder übrig, welcher den netztragenden Kreisausschnitt der Wendelschraubenfläche begrenzt.

Die übrigen auf der Scherkschen Fläche gelegenen Rückungsnetze (aus linksgewundenen und aus ebenen Kurven) liefern keine Netze auf der rechtsgewundenen Wendelschraubenfläche.

Es ist selbstverständlich, daß wir durch einen entsprechenden Grenzübergang aus der SCHERKschen Fläche auch die *linksgewundene Wendelschraubenfläche* erhalten können. Dabei gelten bezüglich Grenzübergang, Fläche und Netz die für die rechtsgewundene Wendelschraubenfläche gemachten Aussagen unverändert, wenn man wieder x durch y, y durch x, γ durch $\frac{\pi}{2} - \gamma$, k durch l, v durch $-v$ ersetzt und die Worte „rechts" und „links" miteinander vertauscht. Man hat also für die linksgewundene Wendelschraubenfläche die Gleichung

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \frac{y}{h} \tag{17}$$

und für die auf ihr gelegenen rhombischen Rückungsnetze die Gleichungen

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \dfrac{u-v}{c} \cdot \sin \dfrac{u+v}{c}, \\ y = h \cdot \dfrac{u-v}{c}, \\ z = r \cdot \sin \dfrac{u-v}{c} \cdot \sin \dfrac{u+v}{c}, \end{cases} \tag{18}$$

$$\left(-\infty < \frac{u}{v} < +\infty\right)$$

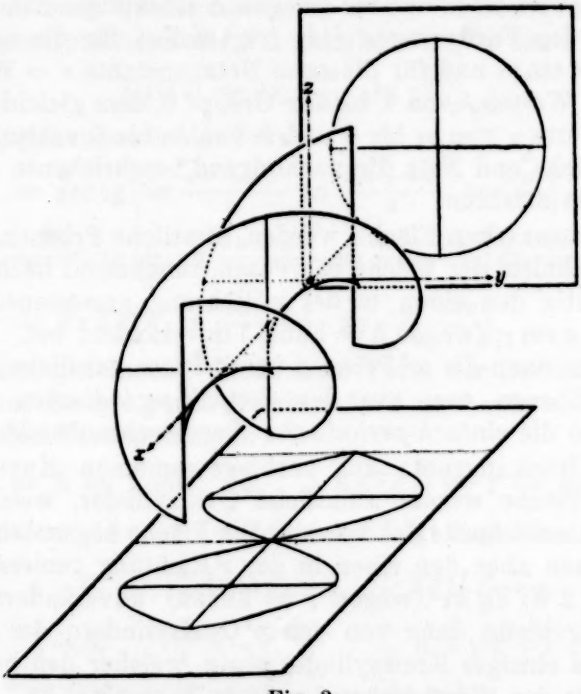


Fig. 3.

Fig. 3 stellt einen Kreisausschnitt aus der rechtsgewundenen Wendelschraubenfläche dar; er ist so bemessen, daß er durch den oben beschriebenen Grenzübergang aus dem einen in Fig. 2 dargestellten Ovalausschnitt der SCHERKschen Fläche

hervorgeht. Die Art der Wiedergabe (Schrägriß) ist die gleiche wie in Fig. 2. Ferner ist auch hier wieder von dem Kreisausschnitt je ein Lotriß in einer Tafel senkrecht zur x- bzw. z-Achse dargestellt und von dem in Wirklichkeit unendlich langen, gewundenen Flächenband nur das Teilstück gezeichnet, welches zwei Windungen des Flächenbereiches umfaßt und durch geradlinige Erzeugende parallel zur z-Achse begrenzt ist. Jedoch sind von den unendlich vielen geradlinigen Erzeugenden innerhalb dieses Flächenbereiches nur diejenigen eingezeichnet, welche aus Flächengeraden der SCHERKschen Fläche hervorgegangen sind. Im Lotriß senkrecht zur z-Achse sind schließlich noch die Spuren der beiden Ebenen (punktiert) angegeben, in welche ein rhombisches Prisma der SCHERKschen Fläche ausgeartet ist.

IV. Die rhombischen Rückungsnetze auf den Scherkschen Minimalflächen und auf den Wendelschraubenflächen als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung.

Wir können jetzt zeigen, daß die sämtlichen auf den SCHERKschen Flächen und auf den Wendelschraubenflächen gelegenen rhombischen Rückungsnetze aufgefaßt werden können als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung. Dieser Nachweis wird geführt, indem aus den Netzgleichungen (3), (10), (11), (16) und (18) die Funktionen s, ω, n_1, n_2, und m ermittelt werden und durch Einsetzen derselben in die Gleichgewichtsbedingungen (IV δ 1) und (IV δ 2)[4]) deren Erfüllung bestätigt wird. Die hierzu erforderlichen Einzelrechnungen, auf deren Wiedergabe wir verzichten, liefern in der Tat $s = 1$ und $m = 0$, was bei den rhombischen Rückungsnetzen selbstverständlich ist, ferner für ω einen Ausdruck, welcher sich in der Form

$$\omega = \arccos \frac{Q(u-v) - P(u+v)}{Q(u-v) + P(u+v)}$$

schreiben läßt, und für n_1 und n_2 Ausdrücke, welche der Bedingung

$$n_1 = -n_2 = n$$

genügen; alle Gleichgewichtsbedingungen sind also tatsächlich erfüllt. Es zeigt sich noch, daß für die sämtlichen betrachteten Netze n in der Form

$$n = \frac{-2C}{\sqrt{P(u+v)\,Q(u-v)}}$$

geschrieben werden kann, wo C eine Konstante ist. Im einzelnen erhalten wir für die Funktionen $P(u+v)$, $Q(u-v)$ und für die Konstante C
bei den Rückungsnetzen aus ebenen Kurven auf den SCHERKschen Flächen:

$$P = \mathfrak{Cof}^2(u+v) - \sin^2\gamma, \quad Q = \mathfrak{Cof}^2(u-v) - \cos^2\gamma, \quad C = \sin\gamma\cos\gamma;$$

bei den Rückungsnetzen aus rechtsgewundenen Kurven auf den Scherkschen Flächen:

$$P = \frac{1}{\mathrm{dn}^2 \frac{u+v}{a}} - \frac{\sin^2\gamma}{a^2}, \quad Q = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 \frac{u-v}{a}} - \frac{k^2\cos^2\gamma}{a^2}, \quad C = \frac{k^2 \sin\gamma\cos\gamma}{a^4}$$

und bei den Rückungsnetzen aus linksgewundenen Kurven auf den Scherkschen Flächen:

$$P = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 \frac{u+v}{b}} - \frac{l^2\sin^2\gamma}{b^2}, \quad Q = \frac{1}{\mathrm{dn}^2 \frac{u-v}{b}} - \frac{\cos^2\gamma}{b^2}, \quad C = \frac{l^2 \sin\gamma\cos\gamma}{b^4};$$

ferner bei den Rückungsnetzen auf der rechtsgewundenen Wendelschraubenfläche:

$$P = \frac{r^2}{c^2}, \quad Q = \frac{1}{\cos^2 \frac{u-v}{c}} - \frac{r^2}{c^2}, \quad C = \frac{r^2 h}{c^4}$$

und bei den Rückungsnetzen auf der linksgewundenen Wendelschraubenfläche:

$$P = \frac{1}{\cos^2 \frac{u+v}{c}} - \frac{r^2}{c^2}, \quad Q = \frac{r^2}{c^2}, \quad C = \frac{r^2 h}{c^4}.$$

Wir haben somit folgendes endgültige Ergebnis:

Ein unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindliches Fadennetz mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur, welches zugleich ein Rückungsnetz ist, besitzt als Trägerfläche eine Scherksche Minimalfläche oder eine Wendelschraubenfläche. Dabei bestehen die beiden (orthogonalen) Scharen der winkelhalbierenden Kurven unserer Netzlinien aus den Schmiegtangentenkurven dieser Flächen. Umgekehrt können auf jeder Scherkschen Minimalfläche die sämtlichen Rückungsnetze (1 Rückungsnetz aus ebenen Kurven, ∞^1 Rückungsnetze aus rechtsgewundenen Kurven und ∞^1 Rückungsnetze aus linksgewundenen Kurven) und ebenso auf der rechts- bzw. linksgewundenen Wendelschraubenfläche die sämtlichen Rückungsnetze (∞^1 Rückungsnetze aus rechts- bzw. aus linksgewundenen Kurven) aufgefaßt werden als im Gleichgewicht befindliche Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

Jede Scherksche Fläche und jede Wendelschraubenfläche kann bekanntlich als Minimalfläche stückweise realisiert werden durch eine in einen geeigneten Flächenrand eingespannte und unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindliche homogene Haut (Plateaux'sches Problem). Darüber hinaus haben nun unsere Untersuchungen ergeben, daß jede der genannten Flächen stückweise auch realisiert werden kann durch gewisse in den Flächenrand eingespannte und unter dem Einfluß von Randkräften im Gleichgewicht befindliche, „infinitesimale" Fadennetze (nämlich unsere Rückungsnetze) und zwar auf unendlich mannigfache Art. Diese im Gleichgewicht befindlichen Rückungsnetze auf den Scherkschen Flächen und auf den Wendelschraubenflächen be-

sitzen also eine Eigenschaft, welche der Eigenschaft ihrer Trägerflächen, Gleichgewichtsflächen im Sinne des PLATEAUX'schen Problems zu sein, völlig entspricht. Denn auch die Voraussetzung der isotropen Spannungsverteilung und der rhombischen Netzstruktur bei den Fadennetzen steht in natürlicher Analogie zur Voraussetzung der Spannungshomogenität bei der Flächenhaut.

V. Finitesimale Modelle von infinitesimalen, im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzen.

Wir wollen unseren *infinitesimalen*, im Gleichgewicht befindlichen Fadennetzen jetzt *finitesimale* Fadennetze, d. h. Netze mit endlicher Maschenweite und endlicher Fadenspannung gegenüberstellen, die sich ebenfalls im Gleichgewicht befinden; die ausgespannten Netzfäden — an den Knotenpunkten geknickt und zwischen ihnen geradlinig verlaufend — bilden hier Streckenzüge, die insgesamt in zwei diskreten Folgen über dem Netz verteilt sind. Diese finitesimalen Fadennetze sollen nun außerdem so beschaffen sein, daß ihre übrigen Eigenschaften, die sie zusammen mit den Gleichgewichtseigenschaften kennzeichnen (Art und Anordnung der Netzfäden, Spannungsverteilung), gleich oder möglichst gleichartig sind zu den Eigenschaften der ursprünglichen infinitesimalen Fadennetze; selbstverständlich sollen hier gleich*artige* Eigenschaften, im Infinitesimalen ausgesprochen, wieder auf die Eigenschaften des ursprünglichen infinitesimalen Netzes selbst zurückführen.

Derartige im Gleichgewicht befindliche, finitesimale Fadennetze ersetzen in mehr oder minder großer Annäherung unsere infinitesimalen Fadennetze und können, da sie sich im allgemeinen auch praktisch in Form von Fadenmodellen verwirklichen lassen, bequem zur Veranschaulichung der infinitesimalen Fadennetze und zugleich deren Trägerflächen dienen.

Wir stellen jetzt den infinitesimalen Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur finitesimale Fadennetze gegenüber, indem wir für diese Netze die Begriffe *isotrope Spannungsverteilung* und *rhombische Netzstruktur* in geeigneter Weise definieren. Dabei erweisen sich diese Begriffe zu einer unmittelbaren wörtlichen Übertragung als zu eng, lassen sich jedoch durch eine einfache Aufgliederung in brauchbarer Weise neu fassen in der Form der nachfolgend gegebenen Definitionen (vgl. Fig. 4):

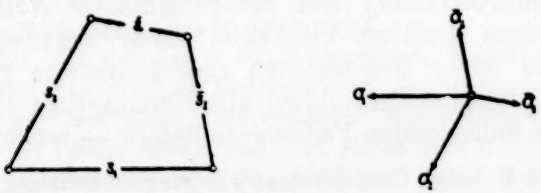


Fig. 4.

Ein finitesimales Fadennetz besitzt $\left\{\begin{matrix}\text{genau}\\\text{fast}\end{matrix}\right\}$-rhombische Netzstruktur, wenn in jedem seiner Maschenvierecke $\left\{\begin{matrix}\text{die sämtlichen vier Seiten}\\\text{die Gegenseiten „im Mittel“}\end{matrix}\right.$ gleich lang sind, d. h. $\left.\begin{matrix}s_1 = \bar{s}_1 = s_2 = \bar{s}_2\\ \tfrac{1}{2}(s_1+\bar{s}_1) = \tfrac{1}{2}(s_2+\bar{s}_2)\end{matrix}\right\}$ ist.

Ein finitesimales Fadennetz besitzt $\left\{\begin{matrix}\text{genau}\\\text{fast}\end{matrix}\right\}$-isotrope Spannungsverteilung, wenn in jedem seiner Knotenfadenkreuze $\left\{\begin{matrix}\text{die sämtlichen}\\\text{die Gegenfäden}\end{matrix}\right.$ vier Fäden gleich gespannt sind, d. h. $\left.\begin{matrix}\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}_2\\ \tfrac{1}{2}(\sigma_1+\bar{\sigma}_1) = \tfrac{1}{2}(\sigma_2+\bar{\sigma}_2)\end{matrix}\right\}$ ist.

„im Mittel“ gleich gespannt sind, d. h.

Wollen wir jetzt den bereits untersuchten speziellen infinitesimalen Fadennetzen, insbesondere den Netzen unserer Sonderklassen IV α) bis IV δ) in Teil I, finitesimale Fadennetze gegenüberstellen, so muß noch vereinbart werden, wie hier die Begriffe *äquidistant, geodätisch, konjugiert* und *Schmiegtangenten* übertragen werden können. Hierzu erklären wir in jedem Netzknotenpunkt: Die „Schmiegebene“ eines Fadenzugs durch die Ebene seiner im Knoten zusammenstoßenden beiden Fadenstrecken, die „Tangente“ und „Hauptnormale“ durch die äußere bzw. innere Winkelhalbierende dieser beiden Strecken, die „Tangentialebene“ des Fadennetzes durch die Ebene der Tangenten der beiden Fadenzüge. Demzufolge bezeichnen wir ein finitesimales Fadennetz dann als

a) geodätisches Netz, wenn in jedem Netzknoten das Streckenviereck zwei Paare gleicher Gegenwinkel besitzt,

b) äquidistantes Netz, wenn in jeder Netzmasche das Streckenviereck zwei Paare gleicher Gegenseiten besitzt,

c) konjungiertes Netz, wenn in jeder Netzmasche das Streckenviereck eben ist,

d) Schmiegtangentennetz, wenn in jedem Netzknoten das Streckenviereck eben ist.

Unter Beachtung dieser Erklärungen stellen wir jetzt den infinitesimalen Fadennetzen der Sonderklassen IV α) bis IV δ), bei denen sich je zwei der angegebenen Eigenschaften überlagern, die nachfolgenden finitesimalen Fadennetze α) bis δ) gegenüber, von denen natürlich noch gezeigt werden muß, daß sie tatsächlich existieren und sich unter dem Einfluß geeigneter Randkräfte im Gleichgewicht befinden:

α) *Geodätische und zugleich konjugierte Fadennetze mit genau-isotroper Spannungsverteilung und fast-rhombischer Netzstruktur:* Alle Netzknoten tragen unebene Vierkante, deren Gegenwinkel einander gleich sind und deren Gegenkanten entgegengesetzt gleiche (Fadenknick-) Winkel miteinander bilden; alle Netzmaschen sind ebene Deltoide[16]). Solche finitesimalen Fadennetze liefern — realisiert — Modelle

[16]) H. Graf und R. Sauer, Über Flächenverbiegung in Analogie zur Verknickung offener Facettenflache. Math. Annalen **105** (1931), S. 499.

der Wendelschraubenflächen, wie z. B. das in Teil I, Fig. 1 wiedergegebene Modell.

β) Äquidistante und zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze mit fast-isotroper Spannungsverteilung und genau-rhombischer Netzstruktur: Alle Netzmaschen sind unebene Rhomben, alle Netzknoten tragen ebene Vierkante, deren Gegenkanten entgegengesetzt gleiche (Fadenknick-) Winkel miteinander bilden. Solche finitesimalen Fadennetze liefern — realisiert — Modelle der Drehflächen konstanten negativen Krümmungsmaßes, wie z. B. die in der Arbeit „Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknoteten und gespannten Fäden“[17]) in Fig. 2 bis 4 wiedergegebenen Modelle.

γ) Geodätische und zugleich Schmiegtangenten-Fadennetze mit genau-isotroper Spannungsverteilung und fast-rhombischer Netzstruktur: Alle Netzknoten tragen ebene Vierkante, deren Gegenwinkel einander gleich sind, d. h. die Netzstreckenzüge sind durchlaufende Gerade. Solche finitesimalen Fadennetze liefern — realisiert — Modelle der Regelflächen zweiter Ordnung, wie z. B. das in Fig. 5 wiedergegebene Modell[18]).

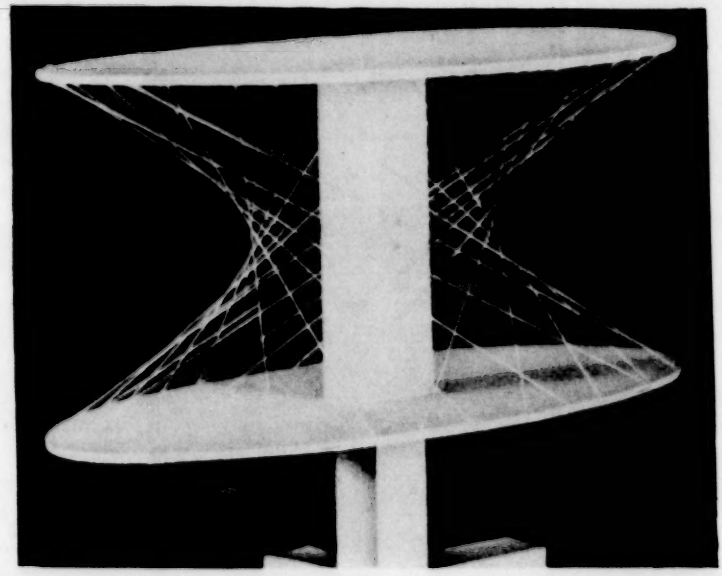


Fig. 5.

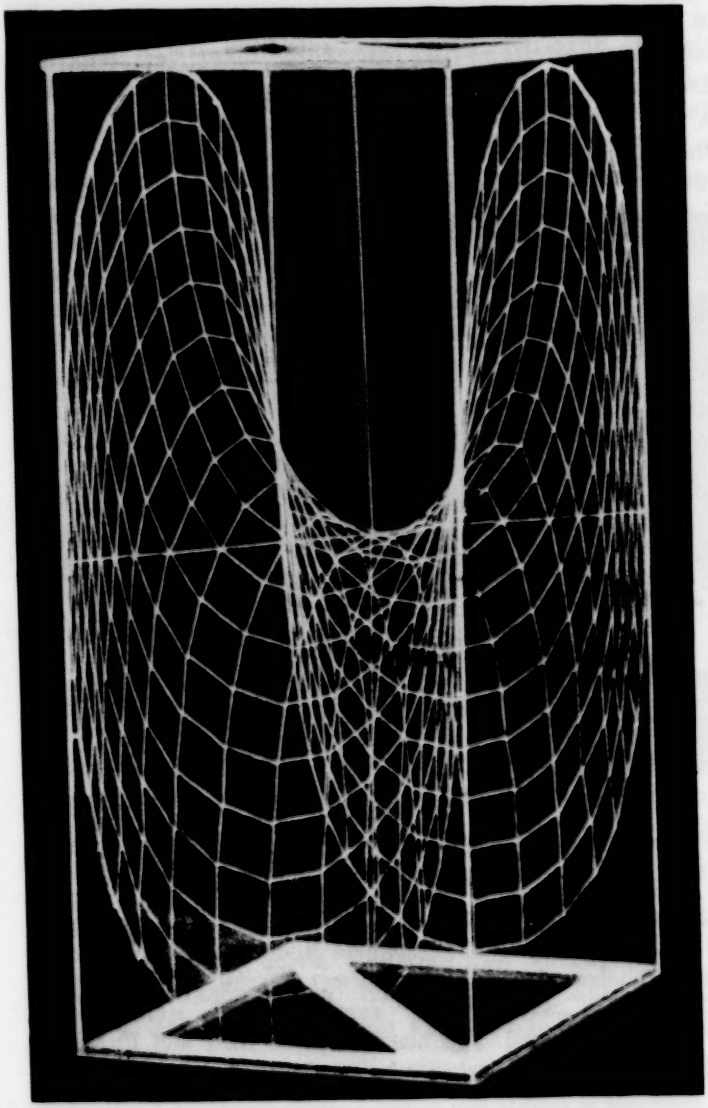
δ) Äquidistante und zugleich konjugierte Fadennetze mit fast-isotroper Spannungsverteilung und genau-rhombischer Netzstruktur: Alle

[17]) H. Thomas, Math. Zeitschrift **47** (1940), S. 74.

[18]) Man beachte, daß sich das in Fig. 5 abgebildete Modell eines einschaligen Hyperboloides von den üblichen Fadenmodellen dieser Fläche dadurch unterscheidet, daß seine Erzeugenden „naturgemäßer“ angeordnet, d. h. weitmöglichst gleichmäßig auf der Fläche verteilt sind. Vgl. hierzu auch H. Graf und R. Sauer, Fastrhombische Kurvennetze und Viereckssnetze, Math. Zeitschrift **44** (1938), S. 374 ff.

Netzmaschen sind ebene Rhomben, d. h. die Netzstreckenzüge sind zueinander kongruent und parallelgestellt. Solche finitesimalen Fadennetze liefern — realisiert — Modelle der SCHERKschen Flächen bzw. Wendelschraubenflächen, wie z. B. die in Fig. 6 bis 8 wiedergegebenen Modelle; diesen Modellen sind die gleichen Abmessungen (Netz- und Flächenkonstanten) zugrunde gelegt wie den in Fig. 2 und 3 ausgewählten Beispielen.

Fig. 6. *Modell zu einem Rückungsnetz aus ebenen Kurven auf einer SCHERKschen Minimalfläche* (vgl. Fig. 2, oberes Bild).



Die drei Koordinatenachsen — im Modell durch ein Fadenkreuz realisiert — sind so zu orientieren, daß die x- bzw. y- bzw. z-Achse nach rechtsvorne bzw. rechts hinten bzw. oben weist. Das Fadennetz ist im Modell von einem *rhombisch*-prismatischen Gehäuse umgeben und an dessen vier vertikalen Glaswänden befestigt. Es stellt nur einen Teil des zum ganzen Rhombenausschnitt gehörigen Gesamtnetzes dar, müßte also zu seiner Vervollständigung über seine Ränder hinaus ins Unendliche fortgesetzt werden; hierbei würde es sich asymptotisch den vertikalen Ebenen nähern, die den ganzen Rhombenausschnitt begrenzen, die man sich also etwas außerhalb des Gehäuseprismas parallel zu dessen Glaswänden vorzustellen hat.

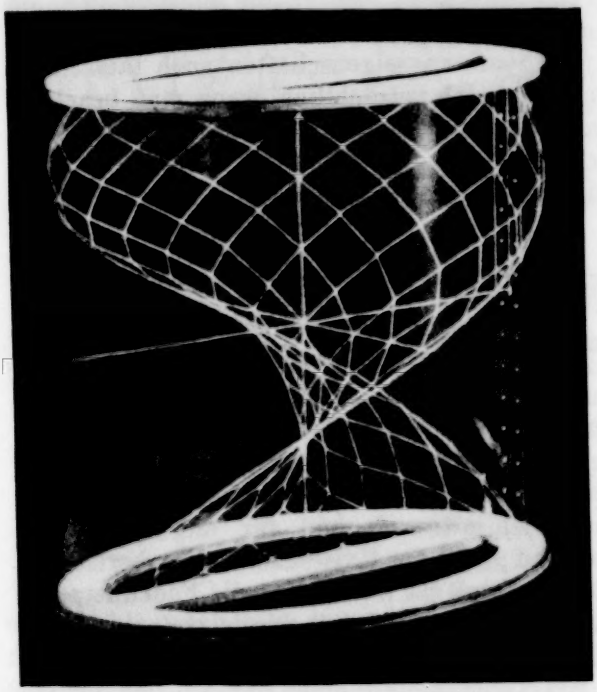


Fig. 7. *Modell zu einem Rückungsnetz aus rechtsgewundenen Kurven auf einer* SCHERKschen *Minimalfläche* (vgl. Fig. 2, unteres Bild).

Orientierung des Fadenkreuzes im Modell: die x- bzw. y- bzw. z-Achse weist nach unten bzw. rechtsvorne bzw. linksvorne. Die *oval*zylindrische Glaswand des Netzgehäuses, an der wieder das Fadennetz befestigt ist, begrenzt hier unmittelbar den Ovalausschnitt des Netzes.

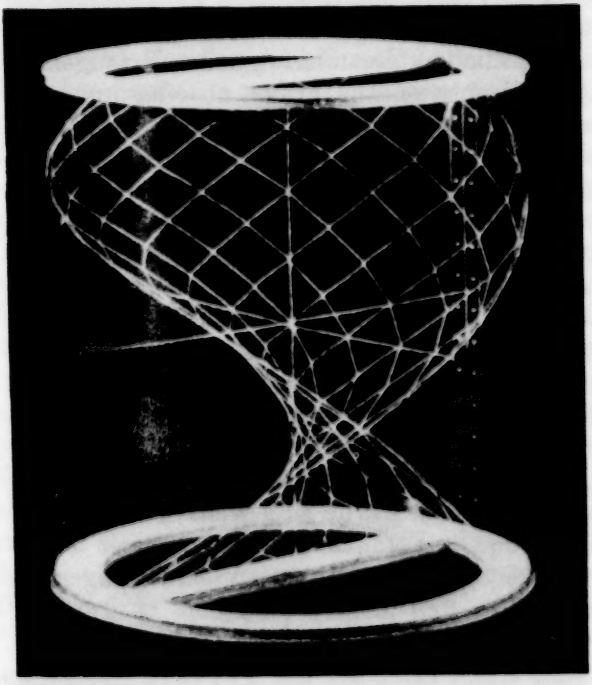


Fig. 8. *Modell zu einem Rückungsnetz aus gewundenen Kurven auf einer rechtsgewundenen Wendelschraubenfläche* (vgl. Fig. 3).

Orientierung des Modellfadenkreuzes und Bedeutung der hier *kreis*zylindrischen Gehäusewand wie bei Fig. 7.

Wir haben jetzt noch nachzuweisen, daß es die finitesimalen, im Gleichgewicht befindlichen Fadennetze mit den unter α) bis δ) beschriebenen Maschen-, Knoten- und Spannungseigenschaften auch tatsächlich gibt. Dieser Nachweis vereinfacht sich beträchtlich, wenn man beachtet, daß *die Fadennetze α) und β) und die Fadennetze γ) und δ) jeweils einander reziprok gegenüberstehen so wie Lagepläne und Kräftepläne* (Cremonapläne) in der graphischen Statik[19]), wobei sich also gegenseitig entsprechen:

$$\left.\begin{matrix}\text{genau}\\ \text{fast}\end{matrix}\right\}\text{-isotrope Spannungsverteilg.} \sim \left.\begin{matrix}\text{genau}\\ \text{fast}\end{matrix}\right\}\text{-rhombische Netzstruktur;}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{geodätische}\\ \text{Schmiegtangenten}\end{matrix}\right\}\text{Knotenvierkante} \sim \left.\begin{matrix}\text{äquidistante}\\ \text{konjugierte}\end{matrix}\right\}\text{Maschenvierecke.}$$

Kennt man aber ein im Gleichgewicht befindliches Fadennetz, dann kann der zugehörige Cremonaplan stets gedeutet werden als ein ebenfalls im Gleichgewicht befindliches Fadennetz. Es genügt daher, den *Existenz- und Gleichgewichtsnachweis* in insgesamt zwei Fällen zu erbringen: für die Fadennetze α) oder β) und für die Fadennetze γ) oder δ). Für die Fadennetze γ) ist der Existenznachweis bereits erbracht[18]), der Gleichgewichtsnachweis ist trivial; für die Fadennetze α) führen wir Existenz- und Gleichgewichtsnachweis wie folgt:

Wir machen zunächst versuchsweise eine Annahme bezüglich der Lage und Anordnung der Netzknotenpunkte eines finitesimalen Fadennetzes α). Es liegt nahe, diese Knotenpunkte wieder auf einer Wendelschraubenfläche, der Trägerfläche eines infinitesimalen Fadennetzes der Sonderklasse IV α) anzunehmen und zwar in der Anordnung, wie sie dort die Schnittpunkte von gleichwinklich aufeinanderfolgenden Erzeugenden mit koaxialen Schraubenlinien darbieten. Die Frage, ob oder inwieweit derartig aufgebaute finitesimale Netze die geforderten Eigenschaften dann auch tatsächlich besitzen, soll zunächst an Hand eines einzeln herausgegriffenen Knotenvierkants untersucht werden:

In Fig. 9, worin man vorerst nur die ausgezogenen Linien beachte, sind drei gleichwinklig und gleichabständig (Abstand m) aufeinanderfolgende Erzeugende a, b, c der Wendelschraubenfläche (dünnlinig) im Lotriß eingezeichnet; als Rißtafel ist eine Ebene gewählt, welche senkrecht auf der Schraubungsachse steht, b enthält und folglich parallel zu a und c verläuft. Ferner sind im Lotriß die von einem Knotenpunkt B ausgehenden vier Fadenstrecken eines Knotenvierkants (dicklinig) angegeben, wobei — entsprechend der vereinbarten Knotenanordnung — die Nachbarknoten A_1, A_2 auf a und C_1, C_2 auf c symmetrisch in bezug auf b liegen müssen. Im Anschluß daran würde man weitere Netzknoten längs der Bahnschraubenlinien — in Fig. 9 nicht eingezeichnet — erhalten, wenn man die angegebenen fünf Netzknoten an den Erzeugenden

[19]) vgl. hierzu S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresberichte der D. M. V. **6** (1899), S. 67 ff.

a und c, an deren Nachbarerzeugenden, usf. fortgesetzt spiegeln würde.

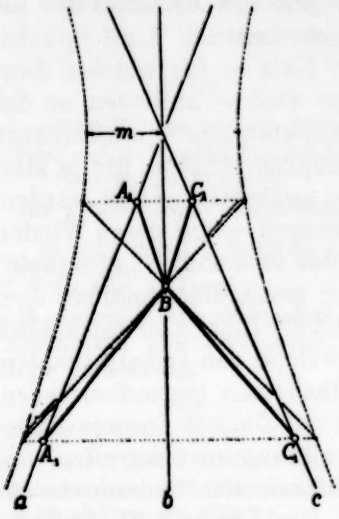


Fig. 9.

Fragen wir jetzt, ob unser so gewonnenes „Netz", das vorläufig ja nur in einem Streifenbereich längs einer Schraubenlinie beschrieben ist, schon die drei geforderten Eigenschaften besitzt:

1) ebene, fast-rhombische Maschenvierecke,

2. geodätische Knotenvierkante,

3. genau-isotrope Fadenspannungen!

Eine einfache Überlegung zeigt dann, daß für die Strecken und Winkel unseres Knotenvierkants im Lotriß und auch im Raum folgende Aussagen gelten:

1) $BA_1 = BC_1$, $BA_2 = BC_2$,

2) $\sphericalangle A_1BA_2 = \sphericalangle C_1BC_2$, b ist gemeinsame Halbierende von $\sphericalangle A_1BC_1$ u. $\sphericalangle A_2BC_2$,

3) $\sphericalangle A_1BC_2 = \sphericalangle C_1BA_2$.

Würde nun in Ergänzung der Aussage 2) darüber hinaus noch $\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle A_2BC_2$ für die Winkel im Raum gelten, dann besäße unser Netz auf Grund dieser Aussagen 1), 2) und 3) auch die entsprechend bezifferten Eigenschaften 1), 2) und 3). Daß nun unser Knotenvierkant in der Tat so bemessen werden kann, daß diese zusätzliche Winkelgleichheit erfüllt ist, läßt sich wieder an Hand der Fig. 9 folgendermaßen erkennen: Denkt man sich sämtliche (in Fig. 9 ausgezogenen) Geraden und Strecken im Raum um b als Achse gedreht, dann beschreiben a und c zusammen ein Drehhyperboloid und die gleich großen Winkel A_1BC_1 und A_2BC_2 zusammen einen Drehkegel (Kegel und Scheitelkegel). Die (in Fig. 9 dünn gestrichelte) Hyperbel, deren Asymptoten die Geradenrisse a und c sind und deren Halbachse die Länge m hat, und das (dick gestrichelte) Geradenpaar stellen die Schnitte dieser Drehflächen mit der Rißtafel dar, woraus dann unmittelbar Verknüpfung und Konstruktionsvorschrift[20]) für drei auf einem Netzfaden aufeinander folgende Knotenpunkte folgt: Aus zwei von diesen Knotenpunkten, z. B. A_1 auf a und B auf b, folgt eindeutig der dritte Knotenpunkt C_2 auf c.

Durch die beiden, als Ausgangspunkte unserer Konstruktion gewählten Netzpunkte A_1 und B ist aber bereits das gesamte Netz festgelegt: Versuchte man nämlich jetzt in schrittweiser Wiederholung der Konstruktion längs des Netzfadens . . . A_1BC_2 . . . nun auch die links auf A_1 und die rechts auf C_2 folgenden Knotenpunkte zu ermitteln, dann erhielte man nacheinander alle Knotenpunkte des Fadens und anschließend — durch Spiegeln an den Erzeugenden — die des gesamten Netzes. Dabei würde sich aber zeigen, daß nach einer gewissen Anzahl von

[20]) Die Konstruktion ist wegen der beiden stets gleichen Asymptotenabschnitte (Klammern!) einfach mit Zirkel und Lineal ausführbar.

Konstruktionsschritten — unter Umständen schon beim ersten Schritt — keine Knotenpunkte mehr geliefert werden, daß also die Zahl der auf den einzelnen Netzfäden bzw. Erzeugenden gewonnenen Knotenpunkte beschränkt ist. Will man ein „engmaschiges" Netz — für welches diese Knotenpunktzahl dann entsprechend groß sein wird — aufbauen, so daß es ein infinitesimales Netz von bestimmtem Netztypus[21]) ausreichend genau ersetzt, dann müssen die beiden Ausgangsnetzknoten, die ja stets auch die beiden ersten Erzeugenden festlegen, geeignet gewählt werden; elementare Überlegungen und Fallunterscheidungen — auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden kann — zeigen, daß eine solche „geeignete" Wahl stets möglich ist. Unsere versuchsweise gemachte Annahme über die Anordnung der Netzknotenpunkte (vgl. S. 192) führt also tatsächlich zum Aufbau von finitesimalen Fadennetzen, welche den infinitesimalen, geodätischen und zugleich konjugierten Fadennetzen gegenüberstehen.

Wir wollen nun zum Schluß noch einmal auf die bei unseren finitesimalen Fadennetzen benutzte reziproke Zuordnung zurückgreifen und versuchen, diese Zuordnung auch auf die infinitesimalen Fadennetze der Sonderklassen IVα) bis IVδ) zu übertragen[22]). Das Ergebnis dieser Übertragung ist in der nachfolgenden *Gegenüberstellung* zusammengefaßt: Sie enthält — auf gleicher Zeilenhöhe — die einander reziprok entsprechenden Fadennetze und ist auch im einzelnen für die verschiedenen Typen der Netze und ihrer Trägerflächen durchgeführt. Die Mannigfaltigkeitsangaben erstrecken sich, wie schon bisher, nur auf formverschiedene Netz- oder Flächenexemplare. In diesem Sinne wird also auf einer *periodischen* Trägerfläche jedes Netz in seiner unendlichfachen kongruenten Wiederholung insgesamt nur als ein Netzexemplar aufgefaßt und gezählt. Jedoch werden hier spiegelsymmetrische (Rechts- und Links-) Exemplare der Netze oder Flächen im Gegensatz zu früher nicht ausdrücklich als solche aufgeführt und (als formverschieden) gezählt; auf eine solche Unterscheidung konnte hier verzichtet werden, da ja ganz allgemein jedem beliebigen, im Gleichgewicht befindlichen Netz reziprok ohnehin immer zwei Netze (ein Rechts- und ein Linksexemplar) entsprechen.

---

[21]) vgl. Teil I, S. 208.

[22]) vgl. W. Blaschke, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut. Proceedings of the fifth international congress of mathematicians, Cambridge 1913, Band II, S. 291.

Reziproke Gegenüberstellung der infinitesimalen, im Gleichgewicht befindlichen Fadennetze mit isotroper Spannungsverteilung und rhombischer Netzstruktur.

IV α)

∞^1 *geodätische und zugleich konjugierte Netze auf 1 Wendelschraubenfläche* (Minimalfläche!) als gemeinsamer Trägerfläche.

Es gibt dabei 3 Netztypen:

∞^1 *Netze vom 1. Typus*;
jedes dieser Netze durchsetzt die Flächenachse und überspannt die Fläche vollständig.

∞^1 *Netze vom 2. Typus;*
jedes dieser Netze berührt eine axiale Schraubenlinie und überspannt außerhalb derselben die Fläche.

1 Netz vom 3. Typus;
es berührt die Flächenachse und überspannt mit Ausnahme dieser Achse die Fläche.

IV β)

∞^1 *äquidistante und zugleich Schmiegtangenten-Netze auf* ∞^1 *Drehflächen konstanten negativen Krümmungsmaßes* als Trägerflächen.

Es gibt dabei 3 Netz- u. Flächentypen:

Je 1 Netz auf den ∞^1 *Flächen vom Hyperboloidtypus;*
jede dieser Flächen verläuft außerhalb ihrer Achse und wird vom Netz vollständig überspannt.

Je 1 Netz auf den ∞^1 *Flächen vom Kegeltypus;*
jede dieser Flächen schneidet ihre Achse (konischer Knoten) und wird vom Netz vollständig überspannt.

1 Netz auf der Pseudosphäre;
diese berührt ihre Achse asymptotisch und wird vom Netz vollständig überspannt.

IV γ)

∞^2 *geodätische und zugleich Schmiegtangenten-Netze,*

d. h. Geradennetze

auf ∞^2 *Regelflächen zweiter Ordnung* als Trägerflächen.

Es gibt dabei 3 Netz- u. Flächentypen:

Je 1 Netz auf den ∞^1 *hyperbolischen Paraboloiden;*
jede dieser Flächen wird vom Netz vollständig überspannt.

Je 1 Netz auf den ∞^2 *einschaligen allgemeinen Hyperboloiden*;
jede dieser Flächen wird vom Netz vollständig überspannt.

Je 1 Netz auf den ∞^1 *einschaligen Drehhyperboloiden;*
jede dieser Flächen wird vom Netz vollständig überspannt.

IV δ)

∞^2 *äquidistante und zugleich konjugierte Netze,*

d. h. Rückungsnetze

auf ∞^1 *Scherkschen Flächen* / *bzw. 1 Wendelschraubenfläche* (Minimalflächen!) als jeweilig gemeinsam. Trägerflächen.

Es gibt dabei 3 Netztypen:

Je 1 Netz aus ebenen Kurven;
jedes dieser Netze überspannt bis auf 2 Systeme von Einzelgeraden die ganze Trägerfl. — auf je einer der ∞^1 Scherkschen Flächen.

∞^1 *Netze aus gewunden. Kurven;*
jedes dieser Netze überspannt nur innerhalb der Ovalausschnitte die Trägerfläche. — auf je einer der ∞^1 Scherkschen Flächen.

∞^1 *Netze aus gewunden. Kurven;*
jedes dieser Netze überspannt nur einen Kreisausschnitt der Trägerfläche. — auf 1 Wendelfläche.

(Eingegangen am 12. Juni 1944.)

† Der Mitverfasser vorliegender Schrift, Dr. Heinz Thomas, geb. am 8. November 1910 in Darmstadt, ist bei dem schweren Luftangriff auf seine Vaterstadt am 12. September 1944 gefallen. Er studierte in Darmstadt, München, Göttingen und Gießen Mathematik und Physik, legte 1934 die wissenschaftliche Lehramtsprüfung ab und promovierte 1938 in Darmstadt zum Dr. rer. nat. Seine Dissertation sowie seine übrigen Veröffentlichungen und Manuskripte weisen ihn als einen ideenreichen Geometer aus, von dem eine fruchtbare Weiterentwicklung erwartet werden konnte. Mit Dr. Thomas, der kurz vor seiner Habilitation stand, habe ich einen meiner begabtesten und tüchtigsten Mitarbeiter und einen treuen Mitmenschen verloren.

Darmstadt, den 8. November 1947. Graf.

Periodische Bewegungen mechanischer Systeme.

Von

H. Seifert in Heidelberg.

§ 1.

Problemstellung.

$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wofür wir abkürzend auch $U(x)$ schreiben, sei eine reelle, regulär analytische Funktion der reellen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots, x_n$ in einem gewissen Gebiete $\mathfrak{G}$ des n-dimensionalen Zahlenraumes. Die Punkte von $\mathfrak{G}$, die für ein bestimmtes reelles E der Ungleichung

$$U(x) \leqq E \tag{1}$$

genügen, mögen eine Menge $\bar{\mathfrak{E}}$ bilden, die homöomorph der n-dimensionalen Vollkugel ist. $\mathfrak{E}$ sei das Innere von $\bar{\mathfrak{E}}$. Auf dem Rande von $\bar{\mathfrak{E}}$, also auf $\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}$, ist dann notwendig $U(x) = E$. — Wir setzen weiter voraus

$$\text{grad } U \neq 0 \text{ auf } \bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}, \tag{2}$$

$$U < E \text{ auf } \mathfrak{E}. \tag{3}$$

Es sei ferner

$$\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, dx_\varrho\, dx_\sigma \qquad (a_{\varrho\sigma} = a_{\sigma\varrho}) \tag{4}$$

eine positiv definite quadratische Form, deren Koeffizienten $a_{\varrho\sigma}(x)$ regulär analytisch auf $\mathfrak{G}$ seien.

Unter den genannten Voraussetzungen gestattet ein mechanisches System mit den Lagrangeschen *Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mit der potentiellen Energie U und der kinetischen Energie*

$$T(x, \dot{x}) = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, \dot{x}_\varrho \dot{x}_\sigma; \quad \dot{x}_\varrho = \frac{dx_\varrho}{dt} \tag{5}$$

mindestens eine periodische Bewegung mit der Gesamtenergie E. Genauer: Man kann einen Kurvenbogen auf $\bar{\mathfrak{E}}$ finden, der zwei Punkte A und B des Randes $\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}$ verbindet und der von dem Systeme periodisch hin und zurück durchlaufen wird.

§ 2.

Die Bewegungsgleichungen.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Systems lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\lambda}(T-U) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}(T-U) \tag{6}$$

oder ausführlich

$$(7)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\ddot{x}_\mu = -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\left\{-\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial a_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\right\}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu-\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_\lambda}.$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Diese Gleichungen lassen sich nach $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ldots, \ddot{x}_n$ auflösen, da die Determinante $|(a_{\lambda\mu})| \neq 0$ ist. Wir führen die Funktionen $a^{\varrho\lambda}(x)$ durch die Gleichungen ein

$$(8)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} a^{\varrho\lambda}a_{\lambda\mu} = \delta_\mu^\varrho$$

und setzen zur Abkürzung

$$(9)\qquad A_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}+\frac{\partial a_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\right\}.$$

Dann wird

$$(10)\qquad \ddot{x}_\varrho = -\sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} a^{\varrho\lambda}A_{\lambda,\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} a^{\varrho\lambda}\frac{\partial U}{\partial x_\lambda}.$$

Man kann dieses System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen, indem man setzt

$$(11)\qquad z_\mu = \dot{x}_\mu.$$

Das System erster Ordnung lautet dann

$$(12)\qquad \begin{aligned}\dot{x}_\varrho &= z_\varrho\\ \dot{z}_\varrho &= -\sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} a^{\varrho\lambda}A_{\lambda,\mu\nu}z_\mu z_\nu-\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n} a^{\varrho\lambda}\frac{\partial U}{\partial x_\lambda}.\end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind reguläre Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$; t in demjenigen Gebiete $\mathfrak{H}$ des $(2n+1)$-dimensionalen Raumes, das man erhält, wenn man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $\mathfrak{G}$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$; t dagegen beliebig variieren läßt. t kommt übrigens in den rechten Seiten von (12) überhaupt nicht vor.

Ist $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$; $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$; $\bar{t}$ ein Punkt in $\mathfrak{H}$, so hat das System (12) genau eine Lösung

$$(13)\qquad x_\varrho = \varphi_\varrho(t), \quad z_\varrho = \psi_\varrho(t), \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

für die

$$(14)\qquad \bar{x}_\varrho = \varphi_\varrho(\bar{t}), \quad \bar{z}_\varrho = \psi_\varrho(\bar{t})$$

gilt, und man kann die Lösung nach beiden Seiten bis an den Rand von $\mathfrak{H}$ fortsetzen[1]) φ_ϱ und ψ_ϱ sind reguläre Funktionen von t.

Nun ist bekanntlich die Gesamtenergie $T+U$ während der Bewegung konstant. Betrachten wir insbesondere eine Bewegung der Gesamtenergie E, so gilt

$$(15)\qquad U(x)+T(x,z) = E,$$

[1]) Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1945), S. 135.

also wegen $T(x,z) \geqq 0$

$$U(x) \leqq E. \tag{16}$$

Die Ungleichung besagt, daß der Punkt x auf dem beschränkten abgeschlossenen Bereiche $\bar{\mathfrak{E}}$ liegt.

Daraus folgt nun weiter, daß während der ganzen Bewegung die Geschwindigkeitskomponenten z_ϱ beschränkt sind. Denn es ist

$$T(x,z) = E - U(x),$$

und die rechte Seite ist auf $\bar{\mathfrak{E}}$ eine stetige und daher beschränkte Funktion von x. Da $T(x,z)$ positiv definit ist, folgt dann, daß die Geschwindigkeitskomponenten z_ϱ beschränkt sein müssen[2]). Die Lösung (13) kommt also für keinen endlichen Wert von t an den Rand von $\mathfrak{H}$ heran.

Die Bewegung des mechanischen Systems mit der Gesamtenergie E ist daher durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit im ganzen Intervalle $-\infty < t < +\infty$ definiert.

Die durch die ersten n Gleichungen (13) gegebene Kurve $x_\varrho = \varphi_\varrho(t)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$ nennen wir eine *Bahnkurve* des Systems.

§ 3.

Einführung neuer Koordinaten in der Umgebung eines Randpunktes.

O sei ein Randpunkt von $\mathfrak{E}$. Wir führen, um die Bahnkurven in der Nähe von O zu untersuchen, ein affines Koordinatensystem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mit dem Anfangspunkte O ein, sodaß im Punkte O wird

$$\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}\, dx_\varrho\, dx_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{n} d\xi_\varrho^2, \tag{17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{18}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_n} < 0. \tag{19}$$

---

[2]) Es ist $\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, Z_\varrho Z_\sigma$ eine stetige Funktion von x und Z, wenn der Punkt x in $\bar{\mathfrak{E}}$ und Z auf der Einheitssphäre $\sum_{\varrho=1}^{n} Z_\varrho^2 = 1$ variiert. Diese Funktion nimmt also ein Minimum an, das wegen der positiven Definitheit der quadratischen Form positiv sein muß:

$$0 < m \leqq \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, Z_\varrho Z_\sigma.$$

Ist nun $z_\varrho = \lambda Z_\varrho$, so folgt

$$m\lambda^2 \leqq \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, z_\varrho z_\sigma$$

oder

$$m\lambda^2 \leqq E - U,$$

das heißt

$$\sum z_\varrho^2 = \lambda^2 \leqq \frac{E-U}{m}.$$

Das ξ-System ist bis auf orthogonale Transformationen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ bestimmt.

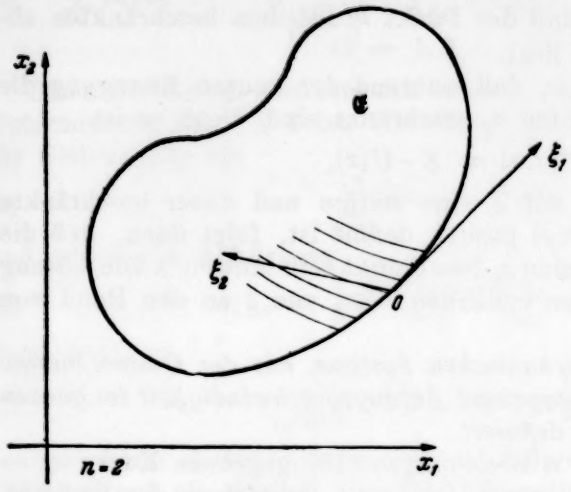


Fig. 1.

Schreiben wir die auf das ξ-System transformierte Form (4) allgemein

$$(20)\quad \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}(x)\, dx_\varrho\, dx_\sigma = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} \alpha_{\varrho\sigma}(\xi)\, d\xi_\varrho\, d\xi_\sigma,$$

so ist (17) gleichbedeutend mit

$$(21)\quad \alpha_{\varrho\sigma}(0) = \delta_{\varrho\sigma}.$$

Die gegen Koordinatentransformationen invarianten Bewegungsgleichungen lauten im ξ-Systeme entsprechend zu § 2 (10)

$$(22)\quad \ddot{\xi}_\varrho = -\sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha^{\varrho\lambda} A_{\lambda,\mu\nu}\, \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \alpha^{\varrho\lambda} \frac{\partial U}{\partial \xi_\lambda}, \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

worin $\alpha^{\varrho\lambda}$ und $A_{\lambda,\mu\nu}$ durch die Gleichungen definiert sind

$$(23)\quad \sum \alpha^{\varrho\lambda} \alpha_{\lambda\mu} = \delta^\varrho_\mu,$$

$$(24)\quad A_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{\partial \alpha_{\mu\nu}}{\partial \xi_\lambda} + \frac{\partial \alpha_{\nu\lambda}}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial \alpha_{\lambda\mu}}{\partial \xi_\nu}\right\}.$$

Die potentielle Energie bezeichnen wir in allen Koordinatensystemen, physikalischem Brauche folgend, mit demselben Buchstaben U.

Indem wir zunächst die Forderung, daß die Gesamtenergie des Systems E sein soll, fallen lassen, betrachten wir diejenigen Lösungen von (22), für die zur Zeit $t = 0$

$$\dot{\xi}_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, die also mit der Geschwindigkeit Null beginnen. Zu jedem Punkte $\bar{\xi}_\varrho$ in der Umgebung von O (bezüglich $\mathfrak{G}$) gibt es genau eine Bahnkurve, die dort mit der Geschwindigkeit Null anfängt:

$$(25)\quad \xi_\varrho = F_\varrho(t, \bar{\xi}),$$

$$(26)\quad \bar{\xi}_\varrho = F_\varrho(0, \bar{\xi}).$$

Nach Existenzsätzen über Lösungen von Differentialgleichungssystemen sind die Funktionen F_ϱ analytisch in $t, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$ in der Umgebung von $t = \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = \ldots = \bar{\xi}_n = 0$.

Mit (25) ist auch

$$\xi_\varrho = F_\varrho(-t, \bar{\xi}) \tag{27}$$

eine Lösung von (22), da (22) sich bei Vertauschung von t und $-t$ nicht ändert. Da aber (25) und (27) dieselben Anfangsbedingungen erfüllen, sind die beiden Lösungen identisch:

$$F(t, \bar{\xi}) = F_\varrho(-t, \bar{\xi}).$$

In der Potenzentwicklung von F_ϱ kommen also nur die geraden Potenzen von t vor, das heißt ξ_ϱ ist eine reguläre Funktion von $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$ und $\tau = t^2$:

$$\xi_\varrho = f_\varrho(\tau, \bar{\xi}), \tag{28}$$

$$\bar{\xi}_\varrho = f_\varrho(0, \bar{\xi}). \tag{29}$$

Wir setzen dementsprechend die Potenzreihen an

$$\xi_\varrho = \bar{\xi}_\varrho + c_\varrho(\bar{\xi})\,\tau + \ldots.$$

Gehen wir mit diesem Ansatze in (22) hinein, so ergibt sich

$$2\,c_\varrho = -\tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha^{\varrho\lambda}(\bar{\xi})\, U_\lambda(\bar{\xi}),$$

wobei die Abkürzung

$$U_\lambda(\xi) = \frac{\partial\, U(\xi)}{\partial\, \xi_\lambda} \tag{30}$$

benutzt wurde. Die Entwicklung lautet also

$$\xi_\varrho = \bar{\xi}_\varrho - \tfrac{1}{4} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha^{\varrho\lambda}(\bar{\xi})\, U_\lambda(\bar{\xi})\,\tau + \ldots. \tag{31}$$

Wir betrachten insbesondere die Bahnkurven, die auf dem Rande von $\mathfrak{E}$ beginnen. Für sie ist die Gesamtenergie E. Die Koordinaten $\bar{\xi}_\varrho$ des Anfangspunktes sind dann durch die Gleichung

$$U(\bar{\xi}) = E \tag{32}$$

miteinander verbunden.

Da $U(0) = E$ und

$$U_r(0) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ist, gestattet $\bar{\xi}_n$ in der Umgebung von O die Entwicklung

$$\bar{\xi}_n = \psi(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}), \tag{33}$$

wobei in der Potenzreihe ψ das konstante Glied und die linearen Glieder fehlen.

Sind $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau$ vorgegeben, so kann man, falls die Beträge dieser Größen genügend klein sind, $\bar{\xi}_n$ aus (33) und danach ξ_ϱ aus (31) als reguläre Funktionen von $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau$ berechnen. Man

hat im Punkte O wegen (31), (21), (18)

$$(34)\qquad \begin{aligned} d\xi_r &= d\bar{\xi}_r, && (r = 1, 2, \ldots, n-1)\\ d\xi_n &= -\tfrac{1}{4} U_n(0)\, d\tau, \end{aligned}$$

sodaß der Übergang von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ zu $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau$ in der Umgebung von O eine umkehrbare regulär analytische Koordinatentransformation ist. Das neue Koordinatensystem hat den Vorteil, daß die vom Rande von $\mathfrak{E}$ ausgehenden Bahnkurven Koordinatenlinien sind. Es ist aber nur in einer gewissen Umgebung von O definiert.

§ 4.

Einführung der Riemannschen Metrik.

Bekanntlich ist das Problem, die Bahnkurven der Gesamtenergie E zu finden, gleichbedeutend damit, die geodätischen Linien der Riemannschen Mannigfaltigkeit zu bestimmen, zu der das Gebiet $\mathfrak{E}$ durch Aufprägung der Metrik

$$(35)\qquad ds^2 = (E-U) \sum_{\varrho,\sigma=1} a_{\varrho\sigma}(x)\, dx_\varrho\, dx_\sigma$$

wird [3]).

Dabei ist aber zu beachten, daß der Rand von $\mathfrak{E}$ nicht mit zur Riemannschen Mannigfaltigkeit gehört, da auf dem Rande $ds^2 = 0$ ist. Dementsprechend sind die Geodätischen der Riemannschen Mannigfaltigkeit nur auf $\mathfrak{E}$ definiert. Ein auf $\mathfrak{E}$ liegender geodätischer Bogen ist zugleich ein Stück einer Bahnkurve. Während aber eine Bahnkurve auch Punkte des Randes $\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}$ enthalten kann, ist das bei der Geodätischen nicht der Fall.

In den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ lautet das Linienelementquadrat

$$(36)\qquad ds^2 = (E-U) \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} \alpha_{\varrho\sigma}(\xi)\, d\xi_\varrho\, d\xi_\sigma .$$

Bezeichnet S die Bogenlänge auf den Bahnkurven $\bar{\xi}_1 = \text{const.}$ $\bar{\xi}_2 = \text{const.}, \ldots, \bar{\xi}_{n-1} = \text{const.}$, wachsend mit wachsendem τ, so ist also

$$(37)\qquad \left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2 = (E-U) \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} \alpha_{\varrho\sigma}(\xi)\, \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial \tau}\, \frac{\partial \xi_\sigma}{\partial \tau},$$

worin man ξ_λ und $\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial \tau}$ aus (31) zu entnehmen hat. Es wird somit $\left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2$ eine reguläre, für $\tau = 0$ verschwindende Funktion von $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau$:

$$(38)\qquad \left(\frac{dS}{d\tau}\right)^2 = \tau\, \mathfrak{P}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau).$$

Wir bestimmen das konstante Glied in der Potenzreihe $\mathfrak{P}$. Es ist nach (21)

$$\alpha_{\varrho\sigma}(0) = \delta_{\varrho\sigma}$$

[3]) C. Carathéodory, Variationsrechnung und die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Leipzig 1935), §§ 308 und 309.

und wegen (31) und (18)

$$\left[\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial \tau}\right]_0 = -\frac{1}{4}\sum_{\lambda=1}^{n} \delta_{\varrho\lambda} U_\lambda(0) = -\frac{1}{4}\,\delta_{\varrho n} U_n(0); \tag{39}$$

darin bedeutet der Index 0, daß $\bar{\xi}_1 = \ldots = \bar{\xi}_{n-1} = \tau = 0$ zu setzen ist. Ferner ist

$$\frac{\partial U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau)}{\partial \tau} = \sum_{\varrho=1}^{n} U_\varrho \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial \tau},$$

also

$$\left[\frac{\partial U(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau)}{\partial \tau}\right]_0 = -\frac{1}{4} U_n^2(0) \tag{40}$$

oder

$$\lim_{\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau \to 0} \frac{E-U}{\tau} = -\left[\frac{\partial U}{\partial \tau}\right]_0 = \frac{1}{4} U_n^2(0). \tag{41}$$

Somit wird

$$\mathfrak{P}(0, \ldots; 0) = \frac{1}{4} U_n^2(0) \cdot \left(\frac{1}{4} U_n(0)\right)^2 = \frac{1}{4^3} U_n^4(0),$$

und damit

$$\frac{dS}{d\tau} = \sqrt{\tau}\, \mathfrak{P}_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau); \qquad \mathfrak{P}_1(0, \ldots; 0) = \frac{1}{2^3} U_n^2(0).$$

Darin ist $\tau \geqq 0$ anzunehmen, und da S mit τ wachsen sollte, der Wurzel das positive Vorzeichen zu erteilen. Daraus folgt durch Integration

$$S = \tau^{\frac{3}{2}} \mathfrak{P}_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau); \qquad \mathfrak{P}_2(0, \ldots; 0) = \frac{1}{12} U_n^2(0). \tag{42}$$

Die Integrationskonstante wurde so gewählt, daß S für $\tau = 0$, also auf dem Rande von $\mathfrak{E}$ verschwindet. Aus (42) folgt

$$S^{\frac{2}{3}} = \tau \mathfrak{P}_3(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau); \qquad \mathfrak{P}_3(0, \ldots; 0) = \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{2}{3}} U_n^{\frac{4}{3}}(0). \tag{43}$$

$S^{\frac{2}{3}}$ ist also in der Umgebung von O eine reguläre Funktion von $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau$.

Wir führen an Stelle von $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau$ die neuen unabhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein durch die Transformation

$$\begin{aligned} y_r &= \bar{\xi}_r && (r = 1, 2, \ldots, n-1) \\ y_n &= S^{\frac{2}{3}} = \tau \mathfrak{P}_3(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}; \tau). && (44) \end{aligned}$$

Man hat im Punkte O

$$\begin{aligned} dy_r &= d\bar{\xi}_r && (r = 1, 2, \ldots, n-1) \\ dy_n &= \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{2}{3}} U_n^{\frac{4}{3}}(0)\, d\tau. && (45) \end{aligned}$$

Es liegt somit eine in der Umgebung von O umkehrbar reguläre Transformation vor.

Die Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ haben ebenso wie $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_{n-1}, \tau$ die Eigenschaft, daß die vom Rande von $\mathfrak{E}$ ausgehenden Bahnkurven Parameterlinien, nämlich $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}, \ldots, y_{n-1} = \text{const.}$ sind. Da y_n eine Funktion der Bogenlänge S ist, so läßt sich $y_n = \text{const.}$ als Parallelfläche zum Rande von $\mathfrak{E}$ deuten.

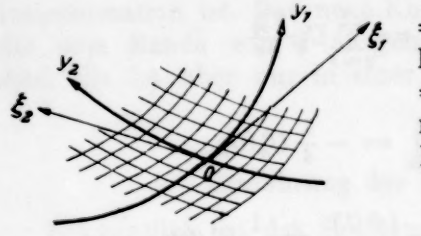


Fig. 2.

Wir zeigen, daß die Flächen $y_n = \text{const.}\ (>0)$ auf den Koordinatenlinien $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}, \ldots y_{n-1} = \text{const.}$ senkrecht stehen. Dabei benutzen wir den folgenden Satz der Differentialgeometrie:

Wenn

$$y_\varrho = y_\varrho(S, \lambda) \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

analytische Funktionen von S und λ sind und die Gleichungen bei fest gehaltenem Parameter λ eine Geodätische mit der Bogenlänge S darstellen, so ist die Orthogonalprojektion des Vektors $\frac{\partial y_\varrho}{\partial \lambda}$ auf die durch seinen Angriffspunkt gehende Geodätische (d. h. auf deren Tangente) unabhängig von S.

Setzen wir in unserem Falle

$$y_r = y_r(\lambda), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$y_n = y_n(S)\ (= S^{\frac{3}{2}}),$$

so ist nach diesem Satze die Orthogonalprojektion des Vektors $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda}, \frac{\partial y_2}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial y_{n-1}}{\partial \lambda}, 0\right)$ auf die Geodätische $y_r = y_r(\lambda)$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ unabhängig von S. Für $S \to 0$ geht aber die Länge des Vektors, also auch die seiner Orthogonalprojektion nach Null. Das besagt: ein Vektor im $y_1 y_2 \ldots y_n$-Systeme, dessen n-te Komponente verschwindet, steht senkrecht auf der durch seinen Anfangspunkt gehenden Geodätischen $y_r = \text{const.}$

Hiernach lautet das Linienelementquadrat in den Koordinaten y_ϱ

$$ds^2 = (E-U) \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} a_{\varrho\sigma}\, dx_\varrho\, dx_\sigma = (E-U) \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} b_{\varrho\sigma}\, dy_\varrho\, dy_\sigma =$$

$$(46) \qquad = (E-U) \left\{ \sum_{r,s=1}^{n-1} b_{rs}\, dy_r\, dy_s + b_{nn}\, dy_n^2 \right\}. \qquad (b_{\varrho\sigma} = b_{\sigma\varrho})$$

Da für $dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_{n-1} = 0$

$$\frac{\partial y_n}{\partial S} = \frac{2}{3} S^{-\frac{1}{3}}$$

sein muß, so berechnet sich b_{nn} zu

$$(47) \qquad b_{nn} = \frac{9}{4(E-U)}\, y_n.$$

Von den b_{rs} gilt

48) $$b_{rs}(0) = \delta_{rs}. \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Denn es ist allgemein

$$\sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} \alpha_{\varrho\sigma}\, d\xi_\varrho\, d\xi_\sigma = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} b_{\varrho\sigma}\, dy_\varrho\, dy_\sigma$$

und im Punkte O

$$d\xi_r = dy_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$d\xi_n = \text{const.}\, dy_n$$

und

$$\alpha_{\varrho\sigma}(0) = \delta_{\varrho\sigma}.$$

Wir nennen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein zum Punkte O gehöriges *normales Koordinatensystem.*

Man kann nun nach dem HEINE-BORELschen Überdeckungssatze den Rand von $\mathfrak{E}$ mit endlich vielen zu gewissen Punkten $O_1, O_2, \ldots, O_m$ gehörigen normalen Koordinatensystemen überdecken. Das zum Punkte O_μ gehörige normale Koordinatensystem sei

(49) $$y_{1\mu}, y_{2\mu}, \ldots, y_{n\mu}.$$

Da diese Koordinatensysteme mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch umkehrbare, regulär analytische Transformationen zusammenhängen, so hängen auch zwei normale Koordinatensysteme, (49) und $y_{1\lambda}, y_{2\lambda}, \ldots, y_{n\lambda}$, durch eine solche Transformation zusammen, falls der Durchschnitt ihrer Definitionsgebiete nicht leer ist. — Sowohl $y_{n\mu}$ wie $y_{n\lambda}$ ist in $\mathfrak{E}$ gleich $S^{\frac{2}{3}}$; also stimmt $y_{n\mu}$ und $y_{n\lambda}$ überein. Wir können daher hinfort den zweiten Index an y_n unterdrücken. y_n ist eine in der Umgebung des Randes von $\mathfrak{E}$ regulär analytische Funktion.

Wenn die Punktmenge $|y_n| < \varepsilon$ mit endlich vielen normalen Koordinatensystemen überdeckt werden kann — für hinreichend kleines ε ist das sicher der Fall, — so nennen wir sie eine *normale Umgebung des Randes von* $\mathfrak{E}$. Unter $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verstehen wir im folgenden immer ein zum Randpunkte O gehöriges normales Koordinatensystem.

§ 5.

Verlauf der Bahnkurven in der Nähe des Randes.

Über den Verlauf der Bahnkurven in der Nähe des Randes gilt der

Satz 1. *Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und eine normale Umgebung $\mathfrak{U}$ des Randes von $\mathfrak{E}$, in der für jede Bahnkurve der Gesamtenergie E gilt*

(50) $$|\dot{y}_n| < \varepsilon, \qquad \ddot{y}_n > \delta.$$

Beweis. Wir betrachten ein zu einem Randpunkte O gehöriges normales Koordinatensystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Es gibt eine so kleine Umgebung von O, daß darin für jede Bahnkurve der Gesamtenergie E

die Ungleichungen

$$|\dot{y}_\varrho| < \varepsilon \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{51}$$

erfüllt sind. Dies folgt daraus, daß

$$T = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} b_{\varrho\sigma}\,\dot{y}_\varrho\,\dot{y}_\sigma = E - U$$

für $y_\varrho \to 0$ nach Null geht, während $(b_{\varrho\sigma}(0))$ die Matrix einer positiv definiten quadratischen Form ist (vgl. Fußnote [2]) von S. 199).

Zum Beweise der Ungleichung $\ddot{y}_n > \delta$ benutzen wir die in den Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ geschriebenen Differentialgleichungen der Bewegung. Da die Bewegungsgleichungen invariant gegen Koordinatentransformationen sind, so erhält man sie aus (10), wenn man x_ϱ durch y, $a_{\varrho\sigma}$ durch $b_{\varrho\sigma}$, $a^{\varrho\sigma}$ durch $b^{\varrho\sigma}$ und $A_{\lambda,\mu\nu}$ durch $B_{\lambda,\mu\nu}$ ersetzt, wobei $b^{\varrho\sigma}$ und $B_{\lambda,\mu\nu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_\sigma b^{\varrho\sigma} b_{\sigma\lambda} = \delta_{\varrho\lambda}, \quad B_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial b_{\mu\nu}}{\partial y_\lambda} + \frac{\partial b_{\nu\lambda}}{\partial y_\mu} + \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial y_\nu}\right)$$

definiert sind. Es gilt also

$$\ddot{y}_n = -\sum_{\lambda,\mu,\nu} b^{n\lambda} B_{\lambda,\mu\nu}\,\dot{y}_\mu\,\dot{y}_\nu - \frac{1}{2}\sum_\lambda b^{n\lambda}\frac{\partial U}{\partial y_\lambda}. \tag{52}$$

$b^{n\lambda} B_{\lambda,\mu\nu}$ ist regulär in der Umgebung von O. Also wird wegen (51) das erste Glied der rechten Seite von (52) seinem Betrage nach beliebig klein, wenn man die Umgebung nur hinreichend klein macht. — Das zweite Glied in (52) hat im Punkte O den Wert — vgl. (47) —

$$-\frac{1}{2\,b_{nn}}\frac{\partial U}{\partial y_n} = \frac{2}{9}\left(\frac{\partial U}{\partial y_n}\right)^2 > 0;$$

das Zeichen > 0 (und nicht $\geqq 0$) gilt hierin, weil im Punkte O grad $U \neq 0$ ist nach (2). Die rechte Seite von (52) hat daher in der Umgebung von O eine positive untere Grenze. Da man zu jedem Randpunkte O eine Umgebung konstruieren kann, in der $|\dot{y}_n| < \varepsilon$ und die untere Grenze von $\ddot{y}_n > 0$ ist, so ist nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatze Satz 1 bewiesen.

Eine Folgerung aus Satz 1 ist

Satz 2. *Es sei* $\mathfrak{U}$ *die normale Umgebung des Satzes 1 und* $x_\varrho = x_\varrho(t)$ *eine Bahnkurve der Gesamtenergie E, die für* $t_1 \leqq t \leqq t_2$ *in* $\mathfrak{U}$ *liegt. Dann ist*

$$t_2 - t_1 < \frac{2\varepsilon}{\delta}. \tag{53}$$

Der Punkt, der die Bahnkurve beschreibt, kann sich also nicht länger als $2\varepsilon/\delta$ *Zeiteinheiten in* $\mathfrak{U}$ *aufhalten.*

Beweis. Aus der zweiten Ungleichung (50) folgt

$$\dot{y}_n(t_2) - \dot{y}_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \ddot{y}_n(t)\,dt > \int_{t_1}^{t_2} \delta\,dt = \delta\cdot(t_2 - t_1).$$

Die linke Seite ist also positiv, und man hat nach der ersten Ungleichung (50)

$$2\varepsilon > \dot{y}_n(t_2) - \dot{y}_n(t_1).$$

Daraus folgt (53).

Es sei nun $x_\varrho = x_\varrho(t)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$ eine bestimmte Bahnkurve der Gesamtenergie E $(-\infty < t < +\infty)$: Wir können auf ihr die Bogenlänge s einführen, wobei wir wachsenden t-Werten wachsende s-Werte entsprechen lassen. Wir behaupten:

Satz 3. *s wächst monoton von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn t das Intervall $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.*

Zum Beweise betrachten wir neben der Umgebung $\mathfrak{U}$ des Satzes 1, die etwa durch die Ungleichung

$$|y_n| < \eta$$

beschrieben wird, die Umgebung $\mathfrak{V}$

$$|y_n| < \frac{\eta}{2}.$$

Es ist nach (35) und (15)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (E-U)\,T(x,\dot{x}) = (E-U)^2.$$

Da nun $E-U$ auf $\mathfrak{E}-\mathfrak{V}$ größer als eine positive Zahl m ist, so hat man, solange die Bahnkurve in $\mathfrak{E}-\mathfrak{V}$ verläuft,

$$\int ds > m \int dt. \tag{54}$$

Die Behauptung des Satzes ist also bewiesen, wenn die Bahnkurve dauernd in $\mathfrak{E}-\mathfrak{V}$ verläuft.

Wenn die Kurve dagegen in $\mathfrak{V}$ eindringt, so muß sie zuvor in $\mathfrak{U}$ eindringen, und es gibt ein maximales Zeitintervall, für das $y_n(t) < \eta$ ist, etwa das Intervall $t_1 < t < t_2$ (Fig. 3). Nach Satz 2 ist $t_2 - t_1 < \frac{2\varepsilon}{\delta}$. Die Kurve $y_n = y_n(t)$ kehrt für dieses Intervall wegen $\ddot{y}_n > \delta$ ihre konvexe Seite der t-Achse zu. Es gibt daher ein bestimmtes Intervall $t_1' < t < t_2'$ $(t_1 < t_1' < t_2' < t_2)$, worin $y_n(t) < \frac{\eta}{2}$ ist, da wir angenommen haben, daß die Kurve in $\mathfrak{V}$ eindringt.

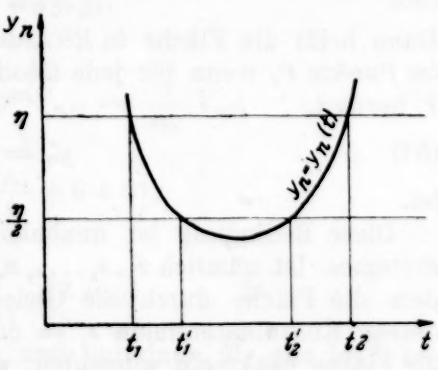


Fig. 3.

Wenn nun die Bahnkurve für positive t nur endlich oft in $\mathfrak{V}$ eindringt, so verweilt sie nur während einer endlichen Zeit in $\mathfrak{V}$. Nach der Ungleichung (54) ist also $\lim_{t \to +\infty} s = +\infty$. Wenn dagegen die Bahnkurve für positives t unendlich oft in $\mathfrak{V}$ eindringt, so durchsetzt sie auch unendlich oft die Schale $\frac{\eta}{2} \leqq y_n \leqq \eta$,

wobei s nach der letzten Gleichung (44) jedesmal um mindestens

$$\eta^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

zunimmt. Es ist also ebenfalls $\lim_{t \to +\infty} s = +\infty$. Entsprechend schließt man für $t < 0$.

Es sei nun g ein geodätischer Bogen von endlicher Länge in $\mathfrak{E}$, der nicht in einem längeren geodätischen Bogen enthalten ist. Ihm entspricht nach Satz 3 auf der zugehörigen Bahnkurve $x_\varrho = \varphi_\varrho(t)$ ein endliches Zeitintervall, etwa $T_1 < t < T_2$. $\varphi_\varrho(T_1)$ und $\varphi_\varrho(T_2)$ müssen notwendig Punkte des Randes $\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}$ sein, da man sonst g verlängern könnte. Die Bahnkurve besteht also aus dem unendlich oft hin und zurück durchlaufenen, durch seine Endpunkte abzuschließenden geodätischen Bogen g.

§ 6.

Geodätische Konvexität.

In einer analytischen n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$ mit den Gaussschen Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sei $\mathfrak{M}^{n-1}$ eine analytische $(n-1)$-dimensionale Fläche. Wir machen sie zu einer Koordinatenfläche $y_n = c = \text{const.}$ und wählen die Koordinaten so, daß die Koordinatenlinien $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$, $\ldots$, $y_{n-1} = \text{const.}$ die Fläche senkrecht schneiden. Das heißt, es soll das Linienelementquadrat

$$ds^2 = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} g_{\varrho\sigma}\, dx_\varrho\, dx_\sigma \tag{55}$$

die Bedingungen erfüllen

$$g_{rn} = 0 \ (r = 1, 2, \ldots, n-1) \text{ für } y_n = c. \tag{56}$$

Dann heißt die Fläche *in Richtung wachsender y_n geodätisch konvex im Punkte P*, wenn für jede Geodätische $y_\varrho = y_\varrho(s)$, die sie im Punkte P berührt,

$$y_n'' = \frac{d^2 y_n}{ds^2} > 0 \tag{57}$$

ist.

Diese Bedingung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes. Ist nämlich $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein weiteres Koordinatensystem, in dem die Fläche durch die Gleichung $z_n = d$ dargestellt wird und dessen Koordinatenlinien $z_1 = \text{const.}$, $z_2 = \text{const.}$, $\ldots$, $z_{n-1} = \text{const.}$ die Fläche senkrecht schneiden, während z_n in derselben Richtung wie y_n wächst, so hat man

$$y_n' = \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial z_\varrho} z_\varrho',$$

$$y_n'' = \sum_{\varrho,\sigma=1}^{n} \frac{\partial^2 y_n}{\partial z_\varrho\, \partial z_\sigma} z_\varrho' z_\sigma' + \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial z_\varrho} z_\varrho''. \tag{58}$$

Da die Geodätische die Fläche im Punkte P berühren soll, so ist $z_n' = 0$ in P. Ferner gestattet $y_n - c$ die Entwicklung nach Potenzen von $z_n - d$

$$y_n - c = (z_n - d)\, k_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) + \ldots.$$

Es sind also die Ableitungen beliebiger Ordnung von y_n nach $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ Null auf der Fläche. Damit vereinfacht sich (58) zu

$$y_n'' = \frac{\partial y_n}{\partial z_n} z_n''. \tag{59}$$

Weil nun z_n in derselben Richtung wachsen sollte wie y_n, ist $\frac{\partial y_n}{\partial z_n} > 0$, und es folgt, daß (57) gleichbedeutend mit $z_n'' > 0$ ist, was zu beweisen war.

Man kann die Bedingung (57) leicht durch die Fundamentalgrößen $g_{\varrho\sigma}$ der Riemannschen Metrik von $\mathfrak{M}^n$ ausdrücken. Die Differentialgleichungen der Geodätischen[4]) lauten

$$y_\lambda'' = -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} y_\mu' y_\nu'.$$

Darin ist

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \sum_{\varrho=1}^{n} g^{\lambda\varrho} \Gamma_{\varrho,\mu\nu}.$$

und

$$\Gamma_{\lambda,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y_\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y_\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial y_\nu}\right)$$

Insbesondere ist für $\lambda = n$

$$y_n'' = -\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \Gamma^n_{\mu\nu} y_\mu' y_\nu'.$$

Da $y_n' = 0$ im Berührungspunkte P ist, so folgt

$$y_n'' = -\sum_{r,s=1}^{n-1} \Gamma^n_{rs} y_r' y_s'.$$

Nun ist wegen (56)

$$\Gamma^n_{rs} = \sum_{\lambda=1}^{n} g^{n\lambda} \Gamma_{\lambda,rs} = g^{nn} \Gamma_{n,rs} = \frac{1}{g_{nn}} \Gamma_{n,rs}$$

und

$$\Gamma_{n,rs} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{rs}}{\partial y_n} + 0 + 0\right).$$

Also erhält man im ganzen

$$y_n'' = \frac{1}{2 g_{nn}} \sum_{r,s=1}^{n-1} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y_n} y_r' y_s'. \tag{60}$$

Die Ungleichung (57) ist also dann und nur dann für alle in P berührenden Geodätischen erfüllt, wenn

$$\sum_{r,s=1}^{n-1} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y_n} y_r' y_s' \tag{61}$$

eine positiv definite quadratische Form im Punkte P ist.

[4]) C. Carathéodory, l. c. § 310.

Im Falle unseres Problemes ist nach (46)

$$g_{rs} = (E-U)\, b_{rs},$$

also im Randpunkte O nach (48)

$$\left[\frac{\partial g_{rs}}{\partial y_n}\right]_0 = -\left[\frac{\partial U(y)}{\partial y_n}\right]_0 \delta_{rs}.$$

Da nun $\frac{\partial U(y)}{\partial y_n}$ und $\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi_n}$ sich im Punkte O nur um einen positiven Faktor unterscheiden (nach (34) und (45)) und da $\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi_n} < 0$ ist nach (19), so ist (61) in genügender Nähe von O positiv definit.

Für spätere Zwecke ist es nötig, die Metrik ds^2 unseres Problemes von (46) für $0 < y_n < \gamma$ so abzuändern, daß eine vorgegebene Fläche $y_n = \delta (< \gamma)$ geodätisch konkav, das heißt geodätisch konvex in Richtung abnehmender y_n wird. Dies gelingt, wenn man an Stelle von ds^2 die Metrik

$$d\tilde{s}^2 = \lambda(y_n)\, ds^2$$

benutzt, wobei

$$\lambda(y_n) = \begin{cases} 1 & \text{für } y_n \geqq \gamma \\ \left(\frac{\gamma - y_n}{\gamma - \delta}\right)^k + 1 & \text{für } 0 < y_n \leqq \gamma \end{cases} \tag{62}$$

und k eine genügend große ganze Zahl ist.

Es ist

$$\lambda(\gamma) = 1,\ \lambda(\delta) = 2$$
$$\lambda'(\gamma) = \lambda''(\gamma) = \ldots = \lambda^{(k-1)}(\gamma) = 0,\ \lambda'(\delta) = -k.$$

$\lambda(y_n)$ und damit die Koeffizienten der quadratischen Form $d\tilde{s}^2$ sind offenbar $(k-1)$ mal stetig differenzierbar. Die Fläche $y_n = \delta$ ist geodätisch konkav in Richtung wachsender y_n, falls k genügend groß ist. Denn die quadratische Form (61) lautet für die Metrik $d\tilde{s}^2$

$$\sum_{r,s=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{g}_{rs}}{\partial y_n} y'_r y'_s = \sum_{r,s=1}^{n-1} \frac{\partial \lambda(y_n) g_{rs}}{\partial y_n} y'_r y'_s =$$

$$= \lambda(y_n) \sum_{r,s=1}^{n-1} \frac{\partial g_{rs}}{\partial y_n} y'_r y'_s + \frac{\partial \lambda(y_n)}{\partial y_n} \sum_{r,s=1}^{n-1} g_{rs} y'_r y'_s. \tag{63}$$

Hierin ist die letzte Summe eine positiv definite quadratische Form, weil

$$ds^2 = \sum_{r,s=1}^{n-1} g_{rs} y'_r y'_s + g_{nn} y'^2_n$$

positiv definit ist. Daher ist (63) an der Stelle $y_n = \delta$ wegen $\lambda(\delta) = 2$ und $\lambda'(\delta) = -k$ für genügend großes k negativ definit. Die Fläche $y_n = \delta$ ist also in der Tat nach der Seite wachsender y_n geodätisch konkav.

§ 7.

Existenzbeweis.

Wir benutzen folgende Tatsache aus der Differentialgeometrie. $\mathfrak{M}^n$ sei eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dreimal stetig differenzierbaren Fundamentalgrößen $g_{\varrho\sigma}$, $\overline{\mathfrak{N}}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{M}^n$. Dann gibt es eine Zahl $d > 0$ mit den Eigenschaften[5]):

1. Zwei Punkte P und Q von $\overline{\mathfrak{N}}$, deren Entfernung[6]) $\varrho(P, Q) \leqq d$ ist, lassen sich durch einen geodätischen Bogen[7]) verbinden, der kürzer ist als alle anderen stückweise glatten Verbindungskurven von P und Q. Seine Länge ist also $\varrho(P, Q)$, und er ist eindeutig durch P und Q bestimmt. Er heißt der P mit Q verbindende *Elementarbogen*, d eine zu $\overline{\mathfrak{N}}$ gehörige *Elementarlänge*.

2. Ist σ ein von 0 bis 1 wachsender, der Bogenlänge proportionaler Parameter auf dem Elementarbogen PQ, so ist der Punkt mit dem Parameter σ stetig abhängig von σ, P und Q.

Ein Polygon, dessen Ecken auf $\overline{\mathfrak{N}}$ liegen und dessen Seiten Elementarbögen sind, nennen wir ein *Elementarpolygon*.

Wir wenden diese Begriffe auf unser Bahnkurvenproblem an. Die Punkte von $\overline{\mathfrak{E}}$, für die $y_n < \alpha$ ist, mögen eine normale Umgebung des Randes $\overline{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E}$ bilden, die so klein gewählt ist, daß alle Flächen $y_n = c$, $0 < c \leqq \alpha$, in Richtung wachsender y_n geodätisch konvex sind. $\overline{\mathfrak{A}}$ sei die Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{E}$, die nicht zu dieser Umgebung gehören. So wie $\overline{\mathfrak{A}}$ mit Hilfe von α definieren wir drei weitere (abgeschlossene) Bereiche $\overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \overline{\mathfrak{D}}$ mit Hilfe der Zahlen β, γ, δ, wobei $\alpha > \beta > \gamma > \delta > 0$ sei. Alle diese Bereiche sind homöomorph der n-dimensionalen Vollkugel, da man $\overline{\mathfrak{E}}$ längs der orthogonalen Trajektorien der Flächen $y_n = \text{const.}$ auf sie zusammenziehen kann. Es hat also

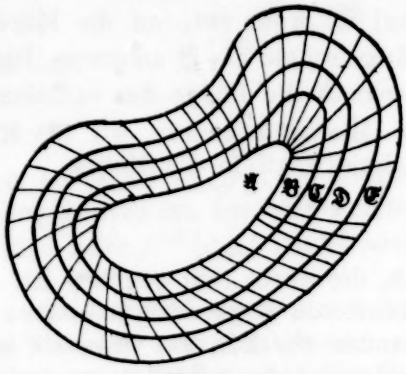


Fig. 4.

---

[5]) Der Beweis findet sich bei Seifert und Threlfall, Variationsrechnung im Großen (Leipzig 1938, Hamburger Einzelschrift 24) Anm. 20 S. 97. Er ist dort für eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}^n$ geführt. Da die Geschlossenheit aber nur bei Anwendung des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes benutzt wird, gilt der Beweis unverändert für eine kompakte Teilmenge $\overline{\mathfrak{N}}$ einer beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

[6]) Unter der Entfernung zweier Punkte P und Q versteht man die untere Grenze der Längen aller stückweise glatten Verbindungskurven von P und Q.

[7]) Wenn $P = Q$ ist, besteht der Elementarbogen nur aus einem Punkte.

einen Sinn, auf $\overline{\mathfrak{A}}$ von Durchmessern zu sprechen, den Bildern von euklidischen Durchmessern einer n-dimensionalen, topologisch auf $\overline{\mathfrak{A}}$ abgebildeten, euklidischen Urbildvollkugel (Fig. 4). Mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ bezeichnen wir die Menge der inneren Punkte von $\overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \overline{\mathfrak{D}}$.

Wir wählen nun zu $\overline{\mathfrak{A}}$ eine Elementarlänge und nehmen sie so klein an, daß jeder Elementarbogen, dessen Endpunkte auf $\overline{\mathfrak{A}}$ liegen, ganz in $\overline{\mathfrak{B}}$ liegt. Wir betrachten die Schar der Durchmesser von $\overline{\mathfrak{A}}$ und teilen jeden Durchmesser in N Teile so, daß auf einander folgende Teilpunkte um nicht mehr als die Elementarlänge entfernt sind und daß die Teilpunkte sich stetig mit dem Durchmesser ändern. Dies ist nach dem Satze von der gleichmäßigen Stetigkeit möglich, da man nur die Durchmesser der euklidischen Urbildvollkugel in N euklidisch gleiche Teile zu teilen hat.

Wir ersetzen nunmehr die Durchmesser von $\overline{\mathfrak{A}}$ durch die Elementarpolygone, die man erhält, wenn man auf einander folgende Teilpunkte durch Elementarbögen verbindet, und ergänzen diese Elementarpolygone an ihren beiden Endpunkten durch die „radialen Strecken“ $y_1 = \text{const.}$ $y_2 = \text{const.}, \ldots, y_{n-1} = \text{const.}$ der Kugelschale $\overline{\mathfrak{B}} - \mathfrak{A}$. Auf diese Weise erhalten wir eine Kurvenschar $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ auf $\overline{\mathfrak{B}}$. B sei das Maximum der Längen dieser Kurven. — Aus $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ ergibt sich eine Kurvenschar $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ auf $\overline{\mathfrak{D}}$, wenn wir an die Kurven von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{B}}$ die radialen Strecken der Kugelschale $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ ansetzen. Diese Kurven sind alle kürzer als $B+2b$, wenn b die Länge der radialen Strecken der Zone $\overline{\mathfrak{E}} - \mathfrak{B}$ bezeichnet.

Hiernach ändern wir die Riemannsche Metrik ds^2 in der Kugelschale $\mathfrak{E} - \mathfrak{C}$ in die Metrik

$$d\tilde{s}^2 = \lambda(y_n)\, ds^2$$

ab, die durch (62) gegeben ist. k wählen wir dabei so groß, daß der Rand von $\mathfrak{D}$ geodätisch konvex wird. Eine Randfläche eines Bereiches nennen wir konvex, wenn sie im Sinne der Richtung von innen nach außen konvex ist, also im vorliegenden Falle im Sinne abnehmender y_n. Die beiden Ränder der Kugelschale $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ sind dann beide geodätisch konvex. — Die Kurven der Schar $\mathfrak{S}_{\mathfrak{D}}$ sind in der Metrik $d\tilde{s}$ kürzer als $B+4b$, da $\lambda \leqq 2$ auf $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{C}$ ist. Wir wählen auf $\overline{\mathfrak{D}}$ bezüglich der Metrik $d\tilde{s}$ eine Elementarlänge $\tilde{d}$, die so klein sei, daß ein Elementarbogen, dessen Endpunkte in $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ liegen, selbst zu $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ gehört. Das ist wegen der geodätischen Konvexität von $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ möglich. Gäbe es nämlich kein solches $\tilde{d}$, so gäbe es beliebig kurze geodätische Bögen, deren Endpunkte in $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ liegen, die aber aus $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ hinausragen. Sie berühren dann Flächen $y_n = \text{const.}$, die außerhalb $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$, aber in beliebiger Nähe von $\overline{\mathfrak{D}} - \mathfrak{B}$ liegen. Das widerspricht der geodätischen Konvexität dieser Flächen.

Auf die Kurven von $\mathfrak{S}_\mathfrak{D}$ wenden wir nun bei Zugrundelegung der Metrik $d\tilde{s}$ ein bekanntes Verkürzungsverfahren[8]) an, das aus zwei Schritten besteht:

1. Schritt: Jede Kurve v von $\mathfrak{S}_\mathfrak{D}$ wird in q gleich lange Bögen geteilt, wobei q so groß genommen wird, daß die Teilbögen kürzer als die Elementarlänge $\tilde{d}$ werden. Jeder Bogen wird durch seine Sehne, das ist der seine Endpunkte verbindende Elementarbogen, ersetzt.

2. Schritt: In dem so entstehenden q-seitigen Elementarpolygone werden die Seitenmitten markiert und durch ein neues Elementarpolygon verbunden, das durch die Hälfte der ersten und letzten Seite zu einem zwischen denselben Randpunkten wie v laufenden Elementarpolygon $f(v)$ von $q+1$ Seiten ergänzt wird.

$f(v)$ ist nur dann nicht kürzer als v, wenn v eine Geodätische ist.

Auf $f(v)$ kann man das gleiche Verfahren wieder anwenden und erhält so ein Elementarpolygon $f^2(v)$. So kann man unbegrenzt fortfahren.

Die Kurvenscharen $f(\mathfrak{S}_\mathfrak{D})$, $f^2(\mathfrak{S}_\mathfrak{D})$, ..., die so aus $\mathfrak{S}_\mathfrak{D}$ entstehen, haben alle die Eigenschaft, $\overline{\mathfrak{D}}$ vollständig zu überdecken, wie in § 8 bewiesen wird. In der ν-ten Kurvenschar gibt es also sicher Kurven, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{B}$ nicht leer ist. Eine solche Kurve v, die nach ν-maliger Anwendung des Verkürzungsverfahrens noch $\mathfrak{B}$ trifft, sei die Kurve v_ν. Dann ist in Formeln

$$f^\nu(v_\nu)\cdot\mathfrak{B}\neq 0; \qquad (\nu = 1,2,3\ldots) \tag{64}$$

Der Punkt bezeichnet Durchschnittsbildung.

Es ist aber auch

$$f^\nu(v_{\nu+m})\cdot\mathfrak{B}\neq 0. \qquad (m = 1,2,\ldots) \tag{65}$$

Wäre diese Ungleichung nämlich falsch, so läge $f^\nu(v_{\nu+m})$ in $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{B}$ und würde, da der Rand von $\mathfrak{D}-\mathfrak{B}$ geodätisch konvex ist, bei fortgesetzter Anwendung von f in $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{B}$ bleiben. Also wäre $f^{\nu+m}(v_{\nu+m})$ punktfremd zu $\mathfrak{B}$, was (64) widerspricht.

Aus der Folge $v_1, v_2, \ldots$ wählen wir nun eine nach einem bestimmten Polygone v konvergierende Teilfolge aus. Um das zu erreichen, brauchen wir nur die Auswahl so zu treffen, daß die diametralen, auf dem Rande von $\mathfrak{D}$ gelegenen Endpunkte der Kurven

---

[8]) Näher ausgeführt in SEIFERT und THRELFALL, Variationsrechnung im Großen (Leipzig 1938).

Der Grundgedanke des Existenzbeweises, nämlich durch Straffziehen einer die Mannigfaltigkeit überdeckenden Kurvenschar die gesuchte Geodätische zu konstruieren, ist aus G. D. BIRKHOFF, Dynamical systems (New York 1927) bekannt, wo er zur Konstruktion einer geschlossenen Geodätischen auf einer konvexen Fläche benutzt wird.

Ob sich mit den Methoden von LUSTERNIK und SCHNIRELMANN die Existenz von n von Rand zu Rand gehenden Geodätischen beweisen läßt, kann ich nicht sagen, weil mir die einschlägige Literatur nicht zur Verfügung steht.

der Teilfolge konvergieren. Die so erhaltene Teilfolge heiße $v_{\nu_1}, v_{\nu_2}, \ldots$. Es ist dann für alle ν

$$f^{\nu}(v) \cdot \overline{\mathfrak{B}} \neq 0. \tag{66}$$

Wäre nämlich diese Ungleichung für ein bestimmtes ν falsch, so läge $f^{\nu}(v)$ in $\overline{\mathfrak{D}} - \overline{\mathfrak{B}}$. Dann läge aber auch ein hinreichend benachbartes Näherungselementarpolygon in $\overline{\mathfrak{D}} - \overline{\mathfrak{B}}$. Es wäre also etwa

$$f^{\nu}(v_{\nu_i}) \cdot \overline{\mathfrak{B}} = 0 \text{ für passendes } \nu_i > \nu,$$

im Widerspruch zu (65).

Aus der Folge der $(q+1)$-seitigen Elementarpolygone $f(v), f^2(v), \ldots$ wählen wir durch iterierte Auswahl eine konvergente Teilfolge aus, indem wir erst dafür sorgen, daß die Folge der ersten Eckpunkte konvergiert, dann durch weitere Auswahl die Folge der zweiten Eckpunkte konvergent machen usw. Das Grenzpolygon heiße w. Da $\overline{\mathfrak{B}}$ abgeschlossen ist, ist nach (66)

$$w \cdot \overline{\mathfrak{B}} \neq 0. \tag{67}$$

w ist ein $(q+1)$-seitiges Elementarpolygon ohne Ecken, also eine Geodätische. Hätte nämlich w eine Ecke, so wäre $f(w)$ kürzer als w. Also wäre auch $f^{\nu}(v)$ für genügend großes ν kürzer als w. Das steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß $f^{\nu}(v)$ für $\nu \to \infty$ nach w konvergiert und dabei die Länge von $f^{\nu}(v)$ monoton fallend nach der Länge von w konvergiert.

Wir betrachten auf w einen zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Punkt und verfolgen w von ihm aus nach beiden Seiten bis zum ersten Schnittpunkte mit dem Rande von $\mathfrak{C}$. Das so erhaltene Stück nennen wir g. Es ist geodätisch in der Metrik ds und kürzer als $B+4b$; denn auf $\mathfrak{C}$ stimmen die Metriken ds und $d\tilde{s}$ überein.

Es seien nun γ_ν und δ_ν Nullfolgen und $\delta_\nu < \gamma_\nu$. Zu den Zahlen γ_ν, δ_ν konstruieren wir die Gebiete $\mathfrak{C}_\nu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ wie zuvor $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zu γ und δ, und einen geodätischen Bogen g_ν, der durch $\overline{\mathfrak{B}}$ geht, kürzer ist als $B+4b$ und dessen Endpunkte auf $\overline{\mathfrak{C}}_\nu - \mathfrak{C}_\nu$ liegen. Auf g_ν betrachten wir einen zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehörigen Punkt R_ν und das durch ihn gehende tangentiale Linienelement e_ν von g_ν. Aus der Folge $e_1, e_2, \ldots$ wählen wir eine konvergente Teilfolge aus. e^* sei das Grenzlinienelement und R^* der Punkt, durch den es hindurchgeht. R^* und e^* bestimmen eine Geodätische g^*. Auf ihr kann man von R^* aus nach keiner Seite die Länge $B+4b$ abtragen. Angenommen nämlich, das wäre nach einer Seite hin möglich, so läge der so abgetragene, abgeschlossene geodätische Bogen der Länge $B+4b$ in einem gewissen $\mathfrak{C}_\nu$, folglich auch die geodätischen Bögen der Länge $B+4b$, die durch die Näherungslinienelemente e_μ mit hinreichend großem μ bestimmt sind. Es würde also der eine Endpunkt von g_μ in $\mathfrak{C}_\nu$ liegen, da g_μ kürzer als $B+4b$ war. Das ist aber für $\mu > \nu$ nicht der Fall.

Die Längen, die man von R^* aus nach der einen oder anderen Seite von g^* abtragen kann, besitzen also endliche obere Grenzen l und r. Also ist g^* eine Geodätische endlicher Länge $l+r$, die sich nicht verlängern läßt. g^* geht daher, wie wir am Ende von § 5 sahen, von Rand zu Rand und gehört zu einer periodischen Bewegung des mechanischen Systemes.

§ 8.

Hilfssatz über Kurvenscharen.

Wir müssen noch den Nachweis führen, daß die Kurvenscharen, die aus $\mathfrak{S}_\mathfrak{D}$ durch wiederholte Anwendung des Verkürzungsverfahrens f hervorgehen, ganz $\overline{\mathfrak{D}}$ überdecken.

Die Kurvenscharen $f^r(\mathfrak{S}_\mathfrak{D})$ haben alle die folgenden Eigenschaften. Sie bestehen aus $(q+1)$-seitigen Elementarpolygonen, die Diametralpunkte des Randes von $\overline{\mathfrak{D}}$ verbinden und deren Ecken stetig von den auf dem Rande $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ liegenden Endpunkten abhängen.

Genauer: ist P, P' ein Paar von Diametralpunkten auf $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ und bezeichnen wir das Elementarpolygon der Schar $f^r(\mathfrak{S}_\mathfrak{D})$, das P mit P' verbindet, mit $(PP') = (P'P)$, seine Ecken mit

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_q, P_{q+1} = P' \tag{68}$$

oder auch, von der anderen Ecke ausgehend, mit

$$P' = P'_0, P'_1, \ldots, P'_q, P'_{q+1} = P,$$

so hängt P_k bei festem k stetig von P ab. Aus dieser Eigenschaft allein folgt aber, daß die Kurvenschar $\overline{\mathfrak{D}}$ überdeckt.

Zum Beweise betrachten wir einen n-dimensionalen projektiven Raum, dem wir die elliptische Metrik aufprägen. Wir denken uns ihn als euklidischen Raum, der durch die unendlich ferne Hyperebene geschlosssen ist. Aus ihm bohren wir die Einheitskugel aus und nennen den Restraum $\mathfrak{P}$ und seine abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}$. Der Kurvenschar $f^r(\mathfrak{S}_\mathfrak{D})$ läßt sich dann eine stetige Abbildung von $\overline{\mathfrak{P}}$ auf $\overline{\mathfrak{D}}$ folgendermaßen zuordnen.

Wir bilden zunächst die Randsphäre $\overline{\mathfrak{P}}-\mathfrak{P}$ topologisch auf die Randsphäre $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ so ab, daß Diametralpunkte in Diametralpunkte übergehen. Wenn den Diametralpunkten PP' von $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ die Diametralpunkte Q, Q' von $\overline{\mathfrak{P}}-\mathfrak{P}$ entsprechen, so bilden wir das in $\overline{\mathfrak{P}}$ liegende Stück der projektiven Geraden QQ' so auf das Elementarpolygon PP' ab, daß eine Folge elliptisch äquidistanter Punkte

$$Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_q, Q_{q+1} = Q'$$

in die Folge (68) der Ecken des Elementarpolygons übergeht und die Teilverhältnisse auf jedem Teilstücke erhalten bleiben.

Diese Abbildung ist stetig, weil der Punkt R von $\overline{\mathfrak{D}}$, der eine bestimmte Elementarstrecke $P_k P_{k+1}$ im Verhältnis $\sigma:(1-\sigma)$ teilt, stetig abhängt von σ, P_k und P_{k+1} nach der Eigenschaft 2 von S. 211 und damit stetig von dem Randpunkte P und σ, da P_k und P_{k+1} stetig von P abhängen. Schließlich hängt P stetig von Q ab, so daß damit R stetig von Q und σ abhängt.

Nun hat jede stetige Abbildung von $\overline{\mathfrak{P}}$ auf $\overline{\mathfrak{D}}$, die die Randsphäre $\overline{\mathfrak{P}}-\mathfrak{P}$ auf die Randsphäre $\overline{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}$ topologisch abbildet, den Abbildungsgrad 1 (mod 2). (Wir müssen den Abbildungsgrad mod 2 benutzen, weil $\overline{\mathfrak{P}}$ für gerade Dimensionen n nicht orientierbar ist). Denn jede stetige Abbildung B von $\overline{\mathfrak{P}}$ auf $\overline{\mathfrak{D}}$, die die Randsphären in der angegebenen Weise abbildet, läßt sich in die Abbildung A deformieren, die die projektiven, durch den Nullpunkt gehenden Geraden, so weit sie in $\overline{\mathfrak{P}}$ liegen, in die Durchmesser von $\overline{\mathfrak{D}}$ abbildet. Man hat, um die Abbildung B in die Abbildung A zu deformieren, nur den Bildpunkt eines Originalpunktes von $\overline{\mathfrak{P}}$ bei der Abbildung B mit dem Bildpunkte bei A in $\overline{\mathfrak{D}}$ durch eine „geradlinige Strecke“ zu verbinden — geradlinig im euklidischen Urbilde verstanden, mit dessen Hilfe auch die Durchmesser von $\overline{\mathfrak{D}}$ erklärt wurden — und den ersten Bildpunkt in den zweiten auf der geradlinigen Verbindungsstrecke mit konstanter Geschwindigkeit in der Zeiteinheit wandern zu lassen. Die Abbildung A hat offenbar den Abbildungsgrad 1, denn sie bildet ganz $\overline{\mathfrak{P}}$ topologisch auf $\overline{\mathfrak{D}}$ ab mit Ausnahme der unendlich fernen Hyperebene von $\overline{\mathfrak{P}}$, die in den Mittelpunkt von $\overline{\mathfrak{D}}$ übergeht. Da der Abbildungsgrad sich durch Deformation nicht ändert, so hat auch die vorgelegte Abbildung B den Abbildungsgrad 1, und es ist daher jeder Punkt von $\overline{\mathfrak{D}}$ Bild mindestens eines Punktes von $\overline{\mathfrak{P}}$, das heißt durch jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{D}}$ geht mindestens eine Kurve der Schar $f'(\mathfrak{S}_2)$.

(Eingegangen am 2. Februar 1945.)

Über das Dirichletsche Prinzip.

Von

E. Kamke und G. G. Lorentz in Tübingen.

§ 1.

Einleitung.

1. Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen $\mathfrak{x}$-Raumes[1]) mit dem Rand $\mathfrak{R}$. Auf $\mathfrak{R}$ sei eine stetige Funktion $f(\mathfrak{x})$ gegeben. Durch das Dirichletsche Prinzip wird eine Verbindung zwischen den beiden folgenden Aufgaben hergestellt:

Randwertaufgabe: Gesucht ist eine in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ harmonische Funktion, die auf $\mathfrak{R}$ die Werte $f(\mathfrak{x})$ hat[2])

Variationsaufgabe: Gesucht ist im Bereich aller zulässigen Funktionen $v(\mathfrak{x})$ mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ eine solche, für die das Dirichletsche Integral

$$(1) \qquad D_{\mathfrak{G}}(v) = \int_{\mathfrak{G}} (\operatorname{grad} v)^2 \, d\mathfrak{x} = \int_{\mathfrak{G}} \sum_{k=1}^{n} v_{x_k}^2(\mathfrak{x}) \, d\mathfrak{x}$$

seinen kleinsten Wert erhält. Dabei heißt eine Funktion $v(\mathfrak{x})$ zulässig, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(α) $v(\mathfrak{x})$ ist stetig in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$;

(β) die Ableitungen v_{x_k} existieren in $\mathfrak{G}$ höchstens mit Ausnahme einer Menge, die ein endliches $(n-1)$-dimensionales Carathéodorysches Maß[3]) hat;

(γ) $D(v)$ existiert.

Im Folgenden wird bewiesen:

---

[1]) Zur Abkürzung steht $\mathfrak{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$.

[2]) Annehmen der Randwerte wird im eigentlichen, klassischen Sinne verstanden, nicht im verallgemeinerten Sinne wie z. B. bei R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II Berlin 1937, S. 483.

[3]) Unter dem $(n-1)$-dimensionalen Carathéodoryschen Maß $\mu\,\mathfrak{M}$ einer Menge $\mathfrak{M}$ im $\mathfrak{x}$-Raum versteht man folgendes. $\mathfrak{M}$ wird bei gegebenem $\varrho > 0$ durch endlich oder abzählbar viele konvexe Mengen $\mathfrak{A}_i$ mit Durchmessern $< \varrho$ überdeckt. Es sei d_i der $(n-1)$-dimensionale Durchmesser der Menge $\mathfrak{A}_i$, d. h. die obere Grenze der Lebesgueschen Masse der Projektion von $\mathfrak{A}_i$ auf alle $(n-1)$-dimensionalen Hyperebenen. Ist λ_ϱ die untere Grenze der Summen $d_1 + d_2 + \cdots$ für alle Überdeckungen der genannten Art, so ist $\mu\,\mathfrak{M} = \lim_{\varrho \to 0} \lambda_\varrho$.

Satz 1. *Ist $u(\mathfrak{x})$ Lösung der Randwertaufgabe, und gibt es zulässige Funktionen für die Variationsaufgabe, so ist u auch Lösung der Variationsaufgabe und insbesondere existiert $D(u)$*[4] (§ 3, Nr. 7, 8).

Satz 2. *Gibt es zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ und ist $u(\mathfrak{x})$ Lösung der Variationsaufgabe, so ist u in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ harmonisch, also auch Lösung der Randwertaufgabe* (§ 3, Nr. 9).

Beide Sätze zusammen ergeben die Aquivalenz der Randwertaufgabe und der Variationsaufgabe: *Gibt es zu der Randfunktion $f(\mathfrak{x})$ überhaupt zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$, so ist die Randwertaufgabe genau dann lösbar, wenn die Variationsaufgabe lösbar ist, und die Lösungen beider Aufgaben stimmen überein.* Diese Tatsache wollen wir als das Dirichletsche Prinzip bezeichnen.

Die Sätze bleiben auch dann bestehen, wenn der Bereich der zulässigen Funktionen, wie es häufig geschieht, enger gewählt wird, etwa indem man statt (β) verlangt, daß (β_1) die Funktionen v im ganzen Gebiet stetig differenzierbar sind oder daß (β_2) sie „stückweise" stetig differenzierbar sind[5].

2. Das bekannte Schlußverfahren von Dirichlet[6] liefert statt der obigen Sätze 1 und 2 leicht folgende Tatsachen:

Satz 1a. Ist $u(\mathfrak{x})$ Lösung der Randwertaufgabe, *ist ferner $u(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G}$ quasi stetig differenzierbar*[7] *und besteht $\mathfrak{R}$ aus endlich vielen dehnungsbeschränkten Flächen*[8], so ist u auch Lösung der Variationsaufgabe.

Satz 2a. Gibt es zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$, und ist $u(\mathfrak{x})$ eine *zweimal stetig differenzierbare* Lösung der Variationsaufgabe, so ist diese Funktion u in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ harmonisch und somit auch Lösung der Randwertaufgabe.

Der Fortschritt der Sätze 1 und 2 gegenüber diesen beiden Sätzen besteht darin, daß die durch Kursivdruck hervorgehobenen Voraussetzungen fortgelassen werden können.

---

[4]) Die Existenz von $D(u)$ folgt bekanntlich für eine beliebige stetige Funktion $f(\mathfrak{x})$ noch nicht daraus, daß u eine Lösung der Randwertaufgabe ist.

[5]) Der Beweis von Satz 1 wird dann insofern einfacher, als man die Theorie des Carathéodoryschen Maßes und den in Nr. 4 angeführten Satz von Lebesgue nicht braucht.

[6]) P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, Leipzig 1876, S. 127—129. Vgl. dazu auch H. Lebesgue, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 24 (1907) 392 f.

[7]) D. h. u soll in $\mathfrak{G}$ stetig differenzierbar sein und die Ableitungen sollen bei Annäherung an den Rand stetigen Grenzwerten zustreben.

[8]) Vgl. hierzu G. Nöbeling, Mathematische Zeitschrift 48 (1943) 747. Diese oder eine ähnliche Voraussetzung ist dadurch bedingt, daß beim Beweis des Satzes eine der Gauss-Greenschen Formeln angewendet wird. Stützt man sich bei deren Herleitung auf den Gaussschen Integralsatz in der Fassung von G. Lorentz, Math. Zeitschrift 51 (1947) 61—81, Hauptsatz, so erhält man gerade den Satz 1a.

Der Satz 1 wird zunächst für Kugeln (bzw. Kreise) bewiesen (§ 2, Nr. 6). Für diese Gebiete ist er bei einer verschärften Voraussetzung (β), d. h. für einen engeren Bereich von zulässigen Funktionen mehrfach formuliert und bewiesen worden[9]). Wir geben für den Satz einen Beweis, der Entwicklungen nach Kugelfunktionen benutzt in Anlehnung an die Beweise von HADAMARD und COURANT-HILBERT. Man kann den Satz auch in Anlehnung an den Beweis von R. COURANT für ein Rechteck beweisen, indem man die Approximation differenzierbarer Funktionen und ihrer Ableitungen durch Polynome benutzt. Doch gehen wir darauf nicht näher ein.

Aus dem Satz 1 für Kugeln kann dann der Satz für beliebige Gebiete[10]) durch POINCARÉS Auskehrverfahren hergeleitet werden, wobei die Tatsache benutzt wird, daß die Randwertaufgabe für gewisse einfache Gebiete lösbar ist (§ 3, Nr. 8—9).

Satz 2 läßt sich nun leicht beweisen, wenn man den Satz 1 für Kugeln heranzieht.

3. Da die Randwertaufgabe für reguläre (im Sinne von Nr. 7, Fußnote 22) Gebiete lösbar ist[11]), ergibt sich aus dem oben formulierten DIRICHLETschen Prinzip die Lösbarkeit der Variationsaufgabe für alle regulären Gebiete und alle stetigen Funktionen $f(\mathfrak{x})$, für die es zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ gibt. Der umgekehrte Weg, die Lösbarkeit der Variationsaufgabe direkt zu beweisen und

---

[9]) Vgl. dazu J. HADAMARD, Bulletin de la Société Mathématique de France 34 (1906) 135—139. H. LEBESGUE, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 24 (1907) 393 f. R. COURANT-D. HILBERT, a. a. O., S. 473—476. Die Beweise gelten für $n = 2$ und Kreise. R COURANT, Journal für die reine und angewandte Mathematik 144 (1914) 194 f.; der Beweis ist für $n = 2$ und ein Rechteck unter der Voraussetzung (β_2) durchgeführt, wobei die Unstetigkeitsstellen der Ableitungen auf Parallelen zu den Rechteckseiten liegen sollen. Der Beweis gilt auch für $n \geqq 2$ und Kugeln unter der Voraussetzung (β_1). Nach COURANT, am zuletzt a. O., S. 194, Fußnote ist der Satz im Fall $n = 3$ für die Kugel von S. ZAREMBA, Bulletin international de l'académie des sciences de Cracovie, Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1909II, S. 206 ff. mit Reihenentwicklungen bewiesen, die nach Kugelfunktionen fortschreiten. Tatsächlich beweist ZAREMBA a. a. O., S. 206—209, daß sein „transformiertes DIRICHLETsches Problem" lösbar ist, und hieraus wird eine spezielle Form des Satzes I erst durch eine längere Schlußkette gewonnen.

[10]) R. COURANT, a. a. O., S. 194, 2. Fußnote, gibt an, der dort für Rechtecke angegebene Beweis sei „nicht nur für Rechtecke, sondern für beliebige Gebiete anwendbar". Diese Behauptung scheint auf einem Irrtum zu beruhen. Interessant ist, daß H. LEBESGUE (a. a. O., S. 393, Zeile 9) im Gegenteil den Beweis bei allgemeinen Gebieten für „fort difficile" hält.

[11]) Die einfachsten Beweise findet man bei H. LEBESGUE, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences 154 (1912) 335—337. O. PERRON, Mathem. Zeitschrift 18 (1923) 42—54 mit einer Vereinfachung von T. RADÓ und F. RIESZ, ebenda 22 (1925) 41—44. Zu diesen Beweisen vgl. auch C. CARATHÉODORY, American journal of mathematics 59 (1937) 709—731.

daraus dann weiter auf die Lösbarkeit der Randwertaufgabe zu schließen, bietet erhebliche Schwierigkeiten, um deren Überwindung sich eine Reihe von Autoren bemüht hat. Dabei ist im Anschluß an HILBERT folgender Weg (sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung) eingeschlagen worden.

Es möge zulässige Funktionen $v(\mathfrak{x})$ mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ geben, und es sei

$$d = \operatorname{fin}_{v} D(v) \tag{2}$$

die untere Grenze von $D(v)$ für alle solchen Funktionen v. Ferner sei

$$v_1(\mathfrak{x}),\ v_2(\mathfrak{x}),\ \dots \tag{3}$$

eine Minimalfolge, d. h. eine Folge von zulässigen Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ und mit

$$\lim_{p\to\infty} D(v_p) = d.$$

Von der Minimalfolge (3), die selbst nicht zu konvergieren braucht, geht man durch eine geeignete Abänderung zu einer Folge

$$V_1(\mathfrak{x}),\ V_2(\mathfrak{x}),\ \dots$$

über, von der man zeigt, daß sie gegen eine harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$ konvergiert und daß $D(u) = d$ ist. Es bleibt dann noch zu beweisen, daß u bei Annäherung an $\mathfrak{R}$ gegen $f(\mathfrak{x})$ konvergiert. Dieser Nachweis ist für Gebiete allgemeiner Art bisher nur für $n = 2$ gelungen. Für $n > 2$ und beliebige reguläre Gebiete hat dagegen die sogenamte direkte Methode der Variationsrechnung bei der Variations- und Randwertaufgabe bisher nicht zum Ziel geführt. Wir gehen darauf in § 5 noch näher ein.

Dagegen kann man mit Hilfe der Sätze 1 und 2 leicht zeigen, daß das obige Verfahren immer die Lösung der Variations- und der Randwertaufgabe liefert, wenn diese letztere überhaupt lösbar ist (§ 4) und wenn die V_p durch die Mittelbildung

$$V_p(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}\int_{\mathfrak{K}} v_p(\mathfrak{y})\, d\mathfrak{y}$$

erzeugt werden, wo $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ gelegene Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ ist und $|\mathfrak{K}|$ den Inhalt der Kugel $\mathfrak{K}$ bedeutet.

§ 2.

Hilfssätze.

4. Für zwei zulässige Funktionen u, v existiert neben $D(u)$ und $D(v)$ auch

$$D(u,v) = \int (u_{x_1} v_{x_1} + \cdots + u_{x_n} v_{x_n})\, d\mathfrak{x},$$

und es ist

$$|D(u,v)| \leqq \sqrt{D(u)}\,\sqrt{D(v)};$$

beides folgt aus der Ungleichung von H. A. Schwarz.

Ferner ist mit u, v auch $au+bv$ bei beliebigen reellen a, b eine zulässige Funktion, da

$$D(au+bv) = a^2 D(u) + b^2 D(v) + 2ab\,D(u,v)$$

ist.

Für eine in $\mathfrak{G}$ quadratisch integrierbare Funktion $v(\mathfrak{x})$ möge

$$\|v\| = \{\int_{\mathfrak{G}} v^2(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}\}^{\frac{1}{2}}$$

ihre Norm heißen. Für das Weitere ist wichtig der folgende

Hilfssatz 1[12]). *Es gibt eine nur von $\mathfrak{G}$ abhängende Konstante $C>0$, so daß*

$$\|v\| \leqq C\sqrt{D(v)}$$

ist für jede zulässige Funktion v, die auf $\mathfrak{R}$ die Randwerte 0 hat.

Beweis. Zunächst sei v in $\mathfrak{G}$ sogar ausnahmslos stetig differenzierbar, also statt (β) die schärfere Voraussetzung (β_1) erfüllt. Es bezeichne $\overline{\mathfrak{G}}$ die Projektion von $\mathfrak{G}$ auf die $\bar{\mathfrak{x}}$-Ebene, wo $\bar{\mathfrak{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ ist, und $\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})$ den Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit der durch den Punkt $(\bar{\mathfrak{x}}, 0)$ gehenden Geraden, die der x_n-Achse parallel ist. Da $D(v)$ existiert, existiert erst recht $\|v_{x_n}\|^2$, und es ist

$$\|v_{x_n}\|^2 = \int_{\overline{\mathfrak{G}}} d\bar{\mathfrak{x}} \int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2\,dx_n;$$

daher gilt für fast alle Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$:

(a) $$\int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2\,dx_n \text{ existiert.}$$

Für solche $\bar{\mathfrak{x}}$ sei $(\bar{\mathfrak{x}}, x_n)$ auf $\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})$ beliebig gewählt und $a < x_n$ die größte Zahl, für die der Punkt $(\bar{\mathfrak{x}}, a)$ auf $\mathfrak{R}$ liegt. Da v_{x_n} in allen Punkten des Intervalls (a, x_n) existiert und stetig ist, und da $v(\mathfrak{x})$ im Punkte $(\bar{\mathfrak{x}}, a)$ verschwindet, ist

(4) $$v(\mathfrak{x}) = v(\bar{\mathfrak{x}}, x_n) - v(\bar{\mathfrak{x}}, a) = \int_a^{x_n} v_{x_n}(\bar{\mathfrak{x}}, \xi)\,d\xi.$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich daraus

$$v^2(\mathfrak{x}) \leqq (x_n - a) \int_a^{x_n} v_{x_n}^2(\bar{\mathfrak{x}}, \xi)\,d\xi$$
$$\leqq C \int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2(\bar{\mathfrak{x}}, x_n)\,dx_n,$$

wenn C die Seite eines achsenparallelen Würfels ist, in dem $\mathfrak{G}$ Platz

---

[12]) Dieser Hilfssatz ist bekannt: S. Zaremba, a. a. O., S. 223; Courant-Hilbert, a. a. O., S. 484.

daraus dann weiter auf die Lösbarkeit der Randwertaufgabe zu schließen, bietet erhebliche Schwierigkeiten, um deren Überwindung sich eine Reihe von Autoren bemüht hat. Dabei ist im Anschluß an HILBERT folgender Weg (sogenannte direkte Methode der Variationsrechnung) eingeschlagen worden.

Es möge zulässige Funktionen $v(\mathfrak{x})$ mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ geben, und es sei

$$d = \inf_{v} D(v) \tag{2}$$

die untere Grenze von $D(v)$ für alle solchen Funktionen v. Ferner sei

$$v_1(\mathfrak{x}),\ v_2(\mathfrak{x}),\ \dots \tag{3}$$

eine Minimalfolge, d. h. eine Folge von zulässigen Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ und mit

$$\lim_{p\to\infty} D(v_p) = d.$$

Von der Minimalfolge (3), die selbst nicht zu konvergieren braucht, geht man durch eine geeignete Abänderung zu einer Folge

$$V_1(\mathfrak{x}),\ V_2(\mathfrak{x}),\ \dots$$

über, von der man zeigt, daß sie gegen eine harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$ konvergiert und daß $D(u) = d$ ist. Es bleibt dann noch zu beweisen, daß u bei Annäherung an $\mathfrak{R}$ gegen $f(\mathfrak{x})$ konvergiert. Dieser Nachweis ist für Gebiete allgemeiner Art bisher nur für $n = 2$ gelungen. Für $n > 2$ und beliebige reguläre Gebiete hat dagegen die sogenamte direkte Methode der Variationsrechnung bei der Variations- und Randwertaufgabe bisher nicht zum Ziel geführt. Wir gehen darauf in § 5 noch näher ein.

Dagegen kann man mit Hilfe der Sätze 1 und 2 leicht zeigen, daß das obige Verfahren immer die Lösung der Variations- und der Randwertaufgabe liefert, wenn diese letztere überhaupt lösbar ist (§ 4) und wenn die V_p durch die Mittelbildung

$$V_p(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}\int_{\mathfrak{K}} v_p(\mathfrak{y})\, d\mathfrak{y}$$

erzeugt werden, wo $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ gelegene Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ ist und $|\mathfrak{K}|$ den Inhalt der Kugel $\mathfrak{K}$ bedeutet.

§ 2.

Hilfssätze.

4. Für zwei zulässige Funktionen u, v existiert neben $D(u)$ und $D(v)$ auch

$$D(u,v) = \int (u_{x_1} v_{x_1} + \cdots + u_{x_n} v_{x_n})\, d\mathfrak{x},$$

und es ist

$$|D(u,v)| \leqq \sqrt{D(u)}\,\sqrt{D(v)};$$

beides folgt aus der Ungleichung von H. A. Schwarz.

Ferner ist mit u, v auch $au+bv$ bei beliebigen reellen a, b eine zulässige Funktion, da

$$D(au+bv) = a^2 D(u) + b^2 D(v) + 2ab\,D(u,v)$$

ist.

Für eine in $\mathfrak{G}$ quadratisch integrierbare Funktion $v(\mathfrak{x})$ möge

$$\|v\| = \{\int_{\mathfrak{G}} v^2(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}\}^{\frac{1}{2}}$$

ihre Norm heißen. Für das Weitere ist wichtig der folgende

Hilfssatz 1[12]). *Es gibt eine nur von $\mathfrak{G}$ abhängende Konstante $C>0$, so daß*

$$\|v\| \leqq C\sqrt{D(v)}$$

ist für jede zulässige Funktion v, die auf $\mathfrak{R}$ die Randwerte 0 hat.

Beweis. Zunächst sei v in $\mathfrak{G}$ sogar ausnahmslos stetig differenzierbar, also statt (β) die schärfere Voraussetzung (β_1) erfüllt. Es bezeichne $\overline{\mathfrak{G}}$ die Projektion von $\mathfrak{G}$ auf die $\bar{\mathfrak{x}}$-Ebene, wo $\bar{\mathfrak{x}} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ ist, und $\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})$ den Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit der durch den Punkt $(\bar{\mathfrak{x}}, 0)$ gehenden Geraden, die der x_n-Achse parallel ist. Da $D(v)$ existiert, existiert erst recht $\|v_{x_n}\|^2$, und es ist

$$\|v_{x_n}\|^2 = \int_{\overline{\mathfrak{G}}} d\bar{\mathfrak{x}} \int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2\,dx_n;$$

daher gilt für fast alle Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$:

(a) $$\int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2\,dx_n \text{ existiert.}$$

Für solche $\bar{\mathfrak{x}}$ sei $(\bar{\mathfrak{x}}, x_n)$ auf $\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})$ beliebig gewählt und $a < x_n$ die größte Zahl, für die der Punkt $(\bar{\mathfrak{x}}, a)$ auf $\mathfrak{R}$ liegt. Da v_{x_n} in allen Punkten des Intervalls (a, x_n) existiert und stetig ist, und da $v(\mathfrak{x})$ im Punkte $(\bar{\mathfrak{x}}, a)$ verschwindet, ist

(4) $$v(\mathfrak{x}) = v(\bar{\mathfrak{x}}, x_n) - v(\bar{\mathfrak{x}}, a) = \int_a^{x_n} v_{x_n}(\bar{\mathfrak{x}}, \xi)\,d\xi.$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich daraus

$$v^2(\mathfrak{x}) \leqq (x_n - a) \int_a^{x_n} v_{x_n}^2(\bar{\mathfrak{x}}, \xi)\,d\xi$$
$$\leqq C \int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2(\bar{\mathfrak{x}}, x_n)\,dx_n,$$

wenn C die Seite eines achsenparallelen Würfels ist, in dem $\mathfrak{G}$ Platz

---

[12]) Dieser Hilfssatz ist bekannt: S. Zaremba, a. a. O., S. 223; Courant-Hilbert, a. a. O., S. 484.

hat. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &\leqq C^2 \int_{\overline{\mathfrak{G}}} d\bar{\mathfrak{x}} \int_{\mathfrak{g}(\bar{\mathfrak{x}})} v_{x_n}^2(\bar{\mathfrak{x}}, x_n)\, dx_n \\ &= C^2 \int_{\mathfrak{G}} v_{x_n}^2(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} \\ &\leqq C^2 D(v)\ ^{13}).\end{aligned}$$

Für eine beliebige zulässige Funktion kann man nicht so einfach schließen, da die Gültigkeit der Beziehung (4) nicht unmittelbar klar ist.

Da nach Nr. 1 (β) die Ausnahmemenge $\mathfrak{A}$ der Punkte $\mathfrak{x}$, in denen die Ableitung v_{x_n} nicht existiert, ein endliches Carathéodorysches Maß hat, gilt für fast alle $\bar{\mathfrak{x}}$:

(b) Auf der Geraden $\mathfrak{x} = (\bar{\mathfrak{x}}, x_n)$, $-\infty < x_n < +\infty$ liegen bei festem $\bar{\mathfrak{x}}$ nur endlich viele Punkte von $\mathfrak{A}$ [14]).

Wir wenden nun den folgenden Satz von Lebesgue an: Es sei $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ stetig, abgesehen von endlich vielen Punkten dort differenzierbar und es existiere das L-Integral

$$\int_a^b f'(x)\, dx;$$

dann ist

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx\ ^{15}). \tag{5}$$

Gilt nun für ein $\bar{\mathfrak{x}}$ aus $\overline{\mathfrak{G}}$ zugleich (a) und (b) so erhält man mit Hilfe dieses Satzes wieder (4). Weiter verläuft der Beweis wie früher.

5. Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{B}$ eine offene Menge* [16]) *und es konvergiere die Folge der harmonischen Funktionen $u_p(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{B}$ gegen eine harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$; die Konvergenz sei gleichmäßig in jeder Menge, die einschließlich ihrer Randpunkte in $\mathfrak{B}$ liegt. Dann gilt*

$$D_{\mathfrak{B}}(u) \leqq \lim_{p\to\infty} D_{\mathfrak{B}}(u_p). \tag{6}$$

Beweis. Für ein $\varepsilon > 0$ bezeichne $\mathfrak{B}_\varepsilon$ die Menge der Punkte $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{B}$, für welche die Kugel $|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| < \varepsilon$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ und dem Radius ε in $\mathfrak{B}$ enthalten ist. Sind $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$ beliebig gewählt, so liegt

---

[13]) Dieser erste Teil des Beweises genügt bereits, wenn man sich mit einer etwas abgeschwächten Form des Satzes 1 begnügt; vgl. Fußnote 17.

[14]) Das ist ein Satz von J. Schauder. Fundamenta Mathematicae 8 (1926), S. 11 f. Zum Beweis vgl. auch G. Lorentz, a. a. O., S. 68 f.

[15]) Vgl. z. B. Pascal's Repertorium der höheren Mathematik I_2, 2. Aufl. Leipzig und Berlin 1929, S. 1088, dort für den Fall, daß $f'(x)$ überall existiert. Die oben angeführte Formulierung erhält man aus dieser speziellen, indem man das Intervall (a, b) in Teilintervalle (α, β) zerlegt, in denen $f'(x)$ höchstens für $x = \alpha$ oder $x = \beta$ nicht existiert, und für diese die Beziehung (5) durch einen Grenzübergang beweist, bei dem die Intervalle (α, β) von innen her approximiert werden.

[16]) $\mathfrak{B}$ braucht nicht zusammenhängend zu sein.

$\mathfrak{B}_{\varepsilon_0}$ einschließlich ihrer Randpunkte in $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}$. Nach einer bekannten Abschätzung[17]) ist daher für jede in $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}$ harmonische Funktion $U(\mathfrak{x})$

$$\max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_{\varepsilon_0}} |U_{x_k}(\mathfrak{x})| \leqq B \max_{\mathfrak{x}\in\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}} |U(\mathfrak{x})| \tag{7}$$

mit einem von U unabhängigen B. In $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}$ ist nach Voraussetzung gleichmäßig $u_p(\mathfrak{x}) \to u(\mathfrak{x})$. Auf $U = u_p - u$ angewandt, ergibt (7) in $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}$ die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen $\frac{\partial u_p}{\partial x_k}$ gegen $\frac{\partial u}{\partial x_k}$. Daher ist

$$D_{\mathfrak{B}_{\varepsilon_0}}(u) = \lim_{p\to\infty} D_{\mathfrak{B}_{\varepsilon_0}}(u_p) \leqq \lim_{p\to\infty} D_{\mathfrak{B}}(u_p).$$

Da $\varepsilon_0 > 0$ beliebig war, ergibt sich daraus (6) für $\varepsilon_0 \to 0$.

6. Beweis des Satzes 1 für die Kugel[18]).

Hilfssatz 3. *Für die Kugel* $\mathfrak{K}$: $|\mathfrak{x}| < r$ *sei* $v(\mathfrak{x})$ *eine zulässige Funktion. Es sei weiter* $u(\mathfrak{x})$ *in* $\mathfrak{K}$ *harmonisch mit den Randwerten* $v(\mathfrak{x})$ *auf der Oberfläche von* $\mathfrak{K}$ *Dann existiert* $D(u)$ *und es ist*

$$D(u) \leqq D(v). \tag{8}$$

Beweis. Wir benutzen die Entwicklung der harmonischen Funktion $u(\mathfrak{x})$ in eine Reihe von Kugelfunktionen[19])

$$u(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\mathfrak{x}), \tag{9}$$

die für $|\mathfrak{x}| \leqq r - \delta$ $(\delta > 0)$ gleichmäßig konvergiert. Hierbei sind die Kugelfunktionen $H_k(\mathfrak{x})$ homogene harmonische Polynome k-ten Grades, deren Koeffizienten durch die Funktion u bestimmt werden. Kugelfunktionen verschiedenen Grades sind bekanntlich auf jeder Kugelfläche $|\mathfrak{x}| = \varrho$ zueinander orthogonal[20]):

$$\int_{|\mathfrak{x}|=\varrho} H_k(\mathfrak{x})\, H_l(\mathfrak{x})\, dF = 0 \qquad (k \neq l). \tag{10}$$

[17]) Vgl. z. B. Courant-Hilbert, a. a. O., S. 248—249.

[18]) Der Beweis des Satzes 1 von Nr. 1 in einer etwas abgeschwächten Form (die zulässigen Funktionen sollen der Bedingung (β_1) statt (β) genügen) läßt sich ohne Heranziehung des Begriffs des Carathéodoryschen Maßes und der in Nr. 4 zitierten Sätze von Schauder und Lebesgue durchführen. Es sind dann folgende Änderungen vorzunehmen: Man streiche die zweite Hälfte des Beweises von Hilfssatz 1; man ersetze die Voraussetzungen über $v(\mathfrak{x})$ im Hilfssatz 3 durch die folgenden: Für die Kugel $\mathfrak{K}$ sei $v(\mathfrak{x})$ eine Funktion, die die Bedingungen (α), (γ) von Nr. 1 erfüllt und überall in $\mathfrak{K}$, abgesehen von Punkten, die auf endlich vielen Kugeloberflächen liegen, stetige Ableitungen v_{x_k} besitzt. Dies genügt dann für den Beweis von Nr. 8.

[19]) Vgl. z. B. O. D. Kellogg, Foundations of potential theory, Berlin 1929, S. 252. Der dortige Beweis gilt für ein beliebiges n. Für $n = 2$ ist (9) die bekannte Entwicklung von $u(\mathfrak{x})$ nach den trigonometrischen Funktionen:

$$u(\mathfrak{x}) = u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

[20]) Vgl. E. W. Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931, S. 144.

Es wird nun die harmonische Funktion

$$s_p(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{p} H_k(\mathfrak{x}) \tag{11}$$

gebildet und

$$v_p(\mathfrak{x}) = v(\mathfrak{x}) - s_p(\mathfrak{x})$$

gesetzt. Es wird sich zeigen, daß die Behauptung des Hilfssatzes sich sehr leicht ergibt, sobald für die Kugeloberfläche $\mathfrak{k}$: $|\mathfrak{x}| = r$ die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\mathfrak{k}} v_p(\mathfrak{x})\, H_l(\mathfrak{x})\, dF = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq l \leqq p \tag{12}$$

bewiesen ist.

Für die Funktion

$$u_p(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x}) - s_p(\mathfrak{x})$$

gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (9) in $|\mathfrak{x}| \leqq \varrho$ für $\varrho < r$ und wegen (10)

$$\int_{|\mathfrak{x}|=\varrho} u_p(\mathfrak{x})\, H_l(\mathfrak{x})\, dF = \int_{|\mathfrak{x}|=\varrho} \sum_{k=p+1}^{\infty} H_k(\mathfrak{x})\, H_l(\mathfrak{x})\, dF$$
$$= \sum_{k=p+1}^{\infty} \int_{|\mathfrak{x}|=\varrho} H_k H_l\, dF = 0$$

für $l \leqq p$. Für $\mathfrak{x} = \frac{\varrho}{r}\mathfrak{y}$ erhält man daraus

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n-1} \int_{|\mathfrak{y}|=r} u_p\left(\frac{\varrho}{r}\,\mathfrak{y}\right) H_l\left(\frac{\varrho}{r}\,\mathfrak{y}\right) dF = 0,$$

und zwar für jedes $\varrho < r$. Da der Integrand für $\varrho \leqq r$ eine stetige Funktion von ϱ ist, erhält man für $\varrho \to r$

$$\int_{|\mathfrak{y}|=r} u_p(\mathfrak{y})\, H_l(\mathfrak{y})\, dF = \int_{\mathfrak{k}} u_p H_l\, dF = 0.$$

Nun ist aber u_p auf $\mathfrak{k}$ gleich v_p, also ist (12) für $l \leqq p$ bewiesen.

Auf die Kugel $\mathfrak{K}$ und die Funktionen s_p, v_p wird nun die Greensche Formel angewendet. Man erhält dann, wenn ν die äußere Normale zu $\mathfrak{k}$ bedeutet,

$$D(s_p, v_p) = -\int_{\mathfrak{K}} v_p\, \Delta s_p\, d\mathfrak{x} + \int_{\mathfrak{k}} v_p \frac{\partial s_p}{\partial \nu}\, dF \tag{13}$$
$$= \int_{\mathfrak{k}} v_p \frac{\partial s_p}{\partial \nu}\, dF,$$

da $\Delta s_p = 0$ ist[21]).

[21]) Die Greensche Formel ist hier anwendbar, da sie aus dem Gaussschen Integralsatz

$$\int_{\mathfrak{K}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) d\mathfrak{x} = \int_{\mathfrak{k}} \{f_1 \cos(\nu, x_1) + \cdots + f_n \cos(\nu, x_n)\}\, dF$$

Da H_k homogen vom Grad k ist, ist auch

$$s_p(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{p} |\mathfrak{x}|^k H_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right),$$

also auf der Kugeloberfläche $|\mathfrak{x}| = r$

$$\frac{\partial s_p}{\partial \nu} = \frac{\partial s_p}{\partial |\mathfrak{x}|} = \sum_{k=0}^{p} k|\mathfrak{x}|^{k-1} H_k\left(\frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{k}{r} H_k(\mathfrak{x}).$$

Nach (12) ist daher die rechte Seite von (13) Null, d. h.

$$D(s_p, v_p) = 0,$$

also

$$D(v) = D(s_p + v_p) = D(s_p) + 2D(s_p, v_p) + D(v_p) = D(s_p) + D(v_p)$$

und somit

$$D(s_p) \leqq D(v).$$

Daher ergibt sich nach Hilfssatz 2

$$D(u) \leqq D(v).$$

§ 3.

Das Dirichletsche Prinzip.

7. Satz 1 für reguläre Gebiete. Der Satz 1 kann offenbar auch so formuliert werden: Es sei $u(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{G}$ harmonische Funktion. Ist $v(\mathfrak{x})$ eine beliebige zulässige Funktion mit denselben Randwerten wie $u(\mathfrak{x})$, so ist

(14) $$D(u) \leqq D(v).$$

Zunächst wird dieser Satz für ein reguläres[22]) Gebiet $\mathfrak{G}$ bewiesen. Für den Beweis wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch eine Folge $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$ von

---

mit

$$f_k(\mathfrak{x}) = \frac{\partial s_p}{\partial x_k} v_p (k = 1, \ldots, n), \quad \frac{\partial s_p}{\partial \nu} = \frac{\partial s_p}{\partial x_1} \cos(\nu, x_1) + \cdots + \frac{\partial s_p}{\partial x_n} \cos(\nu, x_n)$$

folgt. Die Richtigkeit des letzteren für die *Kugel* ergibt sich mit der aus den Elementen bekannten Beweismethode. Dabei ist allerdings von den in Nr. 4 zitierten Sätzen von Schauder und Lebesgue Gebrauch zu machen. Diese Sätze sind indessen entbehrlich, wenn es sich um die in Fußnote 18 formulierte Abänderung des Hilfssatzes 3 handelt.

[22]) Ein Gebiet $\mathfrak{G}$ heißt regulär, wenn alle seine Randpunkte regulär sind. Ein Randpunkt des Gebietes $\mathfrak{G}$ heißt regulär, wenn es für ihn eine Schrankenfunktion (barrier) gibt; zu dieser vgl. z. B. O. D. Kellogg, a. a. O. [18]), S. 362 f. Ein Gebiet ist genau dann regulär, wenn für dasselbe *jede* erste Randwertaufgabe mit stetigen Randwerten lösbar ist. Für $n = 2$ ist jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär; für $n > 2$ ist ein Gebiet z. B. dann regulär, wenn jeder Randpunkt Spitze eines hinreichend kleinen Kegels ist, der von der Spitze abgesehen außerhalb $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ liegt.

offenen Kugeln überdeckt, die einschließlich ihres Randes in $\mathfrak{G}$ liegen. Aus diesen Kugeln wird die Folge

$$\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \mathfrak{k}_1, \ldots$$

gebildet (in der jede der Kugeln unendlich oft vorkommt). Sie möge auch mit

$$\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \ldots \tag{15}$$

bezeichnet werden. Durch das folgende „Auskehrverfahren" von Poincaré kommt man dann zu der Lösung $u(\mathfrak{x})$ der Randwertaufgabe für das Gebiet $\mathfrak{G}$[23]): Man setzt $u_1(\mathfrak{x}) = v(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G} - \mathfrak{K}_1$ und definiert $u_1(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{K}_1$ als die harmonische Funktion mit den Randwerten $v(\mathfrak{x})$. Weiter wird $u_2(\mathfrak{x}) = u_1(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G} - \mathfrak{K}_2$ gesetzt und in $\mathfrak{K}_2$ gleich der harmonischen Funktion mit den Randwerten $u_1(\mathfrak{x})$ usw. Die Folge $u_p(\mathfrak{x})$ konvergiert dann überall in $\mathfrak{G}$ gegen die Lösung der Randwertaufgabe $u(\mathfrak{x})$, wobei die Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ eine gleichmäßige ist.

Nach Hilfssatz 3 ist $D_{\mathfrak{K}_1}(u_1) \leqq D_{\mathfrak{K}_1}(v)$, also

$$D_{\mathfrak{G}}(u_1) \leqq D_{\mathfrak{G}}(v).$$

Ebenfalls nach Hilfssatz 3 ist $D_{\mathfrak{K}_2}(u_2) \leqq D_{\mathfrak{K}_2}(u_1)$, also auch

$$D_{\mathfrak{G}}(u_2) \leqq D_{\mathfrak{G}}(u_1).$$

Allgemein ergibt sich auf diese Weise, daß

$$D_{\mathfrak{G}}(u_p) \leqq D_{\mathfrak{G}}(u_{p-1})$$

ist, also jedes u_p die Ungleichung

$$D_{\mathfrak{G}}(u_p) \leqq D_{\mathfrak{G}}(v)$$

erfüllt.

Für ein festes m sei

$$\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 + \cdots + \mathfrak{k}_m$$

und $\mathfrak{B}$ die offene Menge, die aus $\overline{\mathfrak{B}}$ durch Herausnahme aller Oberflächen der Kugeln $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_m$ entsteht. Für unendlich viele p, für die $\mathfrak{K}_p$ die Kugel $\mathfrak{k}_m$ ist, sind die unmittelbaren Vorgänger von $\mathfrak{K}_p = \mathfrak{k}_m$ in der Folge (15) genau die Kugeln $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_{m-1}$. Für diese unendlich vielen p sind die Funktionen $u_p(\mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{B}$ harmonisch, und für sie ergibt sich mit dem Hilfssatz 2:

$$\begin{aligned} D_{\overline{\mathfrak{B}}}(u) &= D_{\mathfrak{B}}(u) \leqq \varlimsup_{p \to \infty} D_{\mathfrak{B}}(u_p) \\ &\leqq \varlimsup_{p \to \infty} D_{\mathfrak{G}}(u_p) \leqq D_{\mathfrak{G}}(v), \end{aligned}$$

woraus sich (14) für $m \to \infty$ ergibt.

8. Beweis des Satzes 1 im allgemeinen Fall. Wir wollen jetzt zeigen, daß die in Nr. 7 benutzte Voraussetzung der Regularität des Gebiets $\mathfrak{G}$ unwesentlich ist.

---

[23]) Vgl. O. D. Kellogg, a. a. O., S. 322 f.

Man stelle $\mathfrak{G}$ als Summe einer Folge von regulären Gebieten $\mathfrak{G}_p$ dar, so daß jedes $\mathfrak{G}_p$ einschließlich des Randes in $\mathfrak{G}_{p+1}$ enthalten ist[24]; $u_p(\mathfrak{x})$ sei die Lösung der Randwertaufgabe für das Gebiet $\mathfrak{G}_p$ mit den Randwerten $v(\mathfrak{x})$, wobei v wieder die am Anfang von Nr. 7 angegebene Bedeutung hat.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so daß

$$|u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}')| < \varepsilon, \quad |v(\mathfrak{x}) - v(\mathfrak{x}')| < \varepsilon$$

für alle Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ von $\mathfrak{G}$ gilt, für die $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'| < \delta$ ist. Bedeutet $\mathfrak{R}_p$ den Rand des Gebiets $\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{R}$ den von $\mathfrak{G}$, so ist für alle hinreichend großen p, etwa für $p \geqq p_0$, die Entfernung der Mengen $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}$ voneinander kleiner als δ im folgenden Sinne: Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_p$ und $p \geqq p_0$, so gibt es einen Punkt $\mathfrak{x}'$ auf $\mathfrak{R}$ mit $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'| < \delta$. Für $p \geqq p_0$ und einen beliebigen Punkt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{R}_p$ ist somit

$$\begin{aligned} |u(\mathfrak{x}) - u_p(\mathfrak{x})| &= |u(\mathfrak{x}) - v(\mathfrak{x})| \\ &\leqq |u(\mathfrak{x}) - u(\mathfrak{x}')| + |v(\mathfrak{x}) - v(\mathfrak{x}')| \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da u und u_p harmonische Funktionen sind, gilt $|u - u_p| < 2\varepsilon$ auch in $\mathfrak{G}_p$. Ist q eine beliebige natürliche Zahl, so ist diese Ungleichung erst recht erfüllt in $\mathfrak{G}_q$ für alle $p \geqq \mathrm{Max}(p_0, q)$, es ist also $u_p(\mathfrak{x}) \to u(\mathfrak{x})$ gleichmäßig in $\mathfrak{G}_q$. Nach Nr. 7 ist

$$D_{\mathfrak{G}_p}(u_p) \leqq D_{\mathfrak{G}_p}(v).$$

Daraus folgt mit dem Hilfssatz 2

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{G}_q}(u) &\leqq \lim_{p \to \infty} D_{\mathfrak{G}_q}(u_p) \leqq \lim_{p \to \infty} D_{\mathfrak{G}_p}(u_p) \\ &\leqq \lim_{p \to \infty} D_{\mathfrak{G}_p}(v) = D_{\mathfrak{G}}(v), \end{aligned}$$

und da q beliebig war,

$$D_{\mathfrak{G}}(u) \leqq D_{\mathfrak{G}}(v).$$

9. Beweis von Satz 2. Zunächst sei bemerkt, daß die Variationsaufgabe höchstens *eine* Lösung haben kann. Diese wohlbekannte Tatsache ergibt sich z. B. so: Sind die zulässigen Funktionen $u, \bar{u}$ zwei Lösungen der Variationsaufgabe, so ist $D(u) = D(\bar{u}) = d$, ferner auch $\frac{u + \bar{u}}{2}$ eine zulässige Funktion mit denselben Randwerten, also $D\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right) \geqq d$. Aus

$$0 \leqq D\left(\frac{u - \bar{u}}{2}\right) = \frac{1}{2} D(u) + \frac{1}{2} D(\bar{u}) - D\left(\frac{u + \bar{u}}{2}\right) \leqq 0$$

ergibt sich $D(u - \bar{u}) = 0$, also nach Hilfssatz 1 $\|u - \bar{u}\| = 0$, woraus $u(\mathfrak{x}) = \bar{u}(\mathfrak{x})$ folgt.

---

[24] Solche Gebiete kann man z. B. aus achsenparallelen Würfeln bilden.

Man sieht jetzt, daß bei der in Nr. 7 gegebenen Formulierung des Satzes 1 für eine *nichtharmonische* Funktion v

$$D(u) < D(v) \tag{16}$$

gilt.

Wir beweisen nun den Satz 2 mit Hilfe des Hilfssatzes 3, dessen Aussage jetzt für nichtharmonische Funktionen v zu (16) verschärft werden kann.

Wäre die Lösung u der Variationsaufgabe in $\mathfrak{G}$ nicht harmonisch, so gäbe es eine Kugel $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, für die

$$D_{\mathfrak{K}}(\bar{u}) < D_{\mathfrak{K}}(u)$$

wäre, wenn $\bar{u}$ die Lösung der Randwertaufgabe für $\mathfrak{K}$ mit den Randwerten $u(\mathfrak{x})$ bedeutet. Wird $\bar{u}(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G} - \mathfrak{K}$ gesetzt, so ergäbe sich

$$D_{\mathfrak{G}}(\bar{u}) < D_{\mathfrak{G}}(u)$$

im Widerspruch zu der Annahme, daß u die Lösung der Variationsaufgabe ist.

10. Man kann fragen, ob in Nr. 1 die Bedingung (β) für zulässige Funktionen sich nicht durch folgende weniger scharfe ersetzen läßt:

(β^*) die Ableitungen v_{x_k} existieren in $\mathfrak{G}$ fast überall, d. h. mit Ausnahme einer Menge von n-dimensionalem Lebesgueschem Maß Null.

Dies ist aber nicht möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

Es sei $\varphi(t)$ eine im Intervall $-1 \leqq t \leqq +1$ stetige und nichtkonstante Funktion, deren Ableitung fast überall verschwindet[25]). Dann hat die Funktion

$$v(\mathfrak{x}) = v(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)$$

in der Kugel $|\mathfrak{x}| \leqq 1$ fast überall eine Ableitung $v_{x_1} = 0$ und es ist überall $v_{x_2} = \cdots = v_{x_n} = 0$, also existiert $D(v) = 0$.

Die Randwertaufgabe für die Kugel mit den Randwerten $v(\mathfrak{x})$ hat eine Lösung $u(\mathfrak{x})$, die nicht konstant sein kann. Es ist also

$$D(u) > 0 = D(v).$$

Bei der oben genannten Milderung der Bedingung (β) läßt sich also Satz 1 nicht mehr aufrecht erhalten.

§ 4.

Über die Konvergenz einer Minimalfolge.

11. In diesem Paragraphen wird es sich darum handeln, die Lösung der Randwert- oder der Variationsaufgabe durch Grenzprozesse aus einer beliebigen gegebenen Minimalfolge

$$v_1(\mathfrak{x}), v_2(\mathfrak{x}), \ldots \tag{17}$$

zu gewinnen. (Es wird dabei angenommen, daß es zulässige Funktionen mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$ gibt.) In § 1 wurde darauf hingewiesen, daß eine Minimalfolge nicht überall zu konvergieren braucht. Mit der

[25]) Vgl. z. B. E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford 1932, S. 366.

Konvergenz im Mittel statt der gewöhnlichen Konvergenz läßt sich aber beweisen:

Satz 3. *Ist die Randwertaufgabe für das Gebiet $\mathfrak{G}$ und die Randwerte $f(\mathfrak{x})$ lösbar*[26])[27a]*, so konvergiert jede Minimalfolge im Mittel gegen die Lösung $u(\mathfrak{x})$ der Randwertaufgabe:*

$$\|v_p - u\| \to 0. \tag{18}$$

In der Tat, mit den v_p ist auch $\frac{1}{2}(v_p + u)$ eine zulässige Funktion mit den Randwerten $f(\mathfrak{x})$. Daher ist

$$\begin{aligned} 0 \leqq D\left(\frac{v_p - u}{2}\right) &= \frac{1}{2} D(v_p) + \frac{1}{2} D(u) - D\left(\frac{v_p + u}{2}\right) \\ &\leqq \frac{1}{2} D(v_p) + \frac{1}{2} D(u) - d \\ &= \frac{1}{2} D(v_p) - \frac{1}{2} d \to 0 \end{aligned}$$

für $\rho \to \infty$, und mit dem Hilfssatz 1 von Nr. 4 ergibt sich daraus die Behauptung.

12. Man erhält eine Folge, die in jedem Punkte konvergiert, wenn man die Minimalfolge (17) durch eine Mittelbildung glättet.

Zu jedem Punkt $\mathfrak{x}$ des Gebiets $\mathfrak{G}$ wähle man eine offene Kugel $\mathfrak{K}_r(\mathfrak{x})$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$ und dem Radius $r = r(\mathfrak{x})$, die ganz in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, und setze

$$V_p(\mathfrak{x}, r(\mathfrak{x})) = \frac{1}{|\mathfrak{K}_r|} \int_{\mathfrak{K}_r(\mathfrak{x})} v_p(\mathfrak{y})\, d\mathfrak{y}. \tag{19}$$

Satz 4. *Hat die Randwertaufgabe die Lösung*[26]) *$u(\mathfrak{x})$, so gilt*

$$\lim_{p \to \infty} V_p(\mathfrak{x}, r) = u(\mathfrak{x}), \tag{20}$$

und zwar sogar gleichmäßig in jedem abgeschlossenem Teilgebiet $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$, wenn $r = r(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{g}$ oberhalb einer festen positiven Schranke bleibt.

Beweis. Nach dem Gaussschen Mittelwertsatz ist

$$u(\mathfrak{x}) = \frac{1}{|\mathfrak{K}_r|} \int_{\mathfrak{K}_r(\mathfrak{x})} u(\mathfrak{y})\, d\mathfrak{y}.$$

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung erhält man daher

$$\begin{aligned} |V_p(\mathfrak{x}, r) - u(\mathfrak{x})|^2 &= \left| \frac{1}{|\mathfrak{K}_r|} \int_{\mathfrak{K}_r(\mathfrak{x})} [v_p(\mathfrak{y}) - u(\mathfrak{y})]\, d\mathfrak{y} \right|^2 \\ &\leqq \frac{1}{|\mathfrak{K}_r|^2} |\mathfrak{K}_r \int_{\mathfrak{K}_r(\mathfrak{x})} |v_p(\mathfrak{y}) - u(\mathfrak{y})|^2\, d\mathfrak{y} \\ &\leqq \frac{1}{|\mathfrak{K}_r|} \|v_p - u\|^2. \end{aligned}$$

Mit (18) ergibt sich hieraus die Behauptung.

[26]) Nach Fußnote 10) ist das sicher der Fall, wenn $\mathfrak{G}$ ein reguläres Gebiet ist.

[27a]) Der allgemeine Fall wird in einer Note von G. Lorentz behandelt, die demnächst in dieser Zeitschrift erscheint.

Aus Satz 4 folgt unmittelbar:

Wählt man insbesondere für $r = r(\mathfrak{x})$ die Entfernung des Punktes $\mathfrak{x}$ vom Rande des Gebiets $\mathfrak{G}$, also stets den größtmöglichen Wert, so erhält man eine Folge von Funktionen

$$V_1(\mathfrak{x}), V_2(\mathfrak{x}), \ldots, \tag{21}$$

für die

$$\lim_{p\to\infty} V_p(\mathfrak{x}) = u(\mathfrak{x})$$

überall in $\mathfrak{G}$ und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ gilt.

§ 5.

Bemerkungen zu der sog. direkten Methode der Variationsrechnung.

13. Am Schluß der Einleitung ist gesagt worden, daß durch die sog. direkte Methode der Variationsrechnung bei einer Dimensionszahl $n \geqq 3$ bisher *kein* Beweis, weder für die Lösbarkeit der Randwertaufgabe noch für die Lösbarkeit der Variationsaufgabe gelungen ist[27]). Da das anscheinend nirgends deutlich ausgesprochen ist, sei hierauf noch etwas näher eingegangen.

Die Arbeit von B. Levi[28]) kann unbeachtet bleiben, da in ihr ganz offensichtlich nur an den Fall $n = 2$ gedacht ist.

Fubini[29]) geht von einer Minimalfolge aus und bildet aus ihr gerade die in Nr. 12 eingeführten Funktionen $V_p(\mathfrak{x}, r)$. Er will — womit die direkte Methode der Variationsrechnung zum Ziel geführt hätte — beweisen: die $V_p(\mathfrak{x}, r)$ konvergieren für $p \to \infty$ gegen einen von $r = r(\mathfrak{x})$ unabhängigen Grenzwert $u(\mathfrak{x})$, falls das Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär ist, und diese Funktion $u(\mathfrak{x})$ ist eine Lösung der Variations- und der Randwertaufgabe. Der Beweis stützt sich auf das folgende Lemma[30]):

Es sei $v(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G}+\mathfrak{R}$ stetig differenzierbar, der Laplacesche Differentialausdruck Δv existiere in $\mathfrak{G}$ und sei über $\mathfrak{G}$ integrierbar, ferner sei $\Delta v \leqq 0$ in $\mathfrak{G}$, $w(\mathfrak{x}) \geqq v(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{G}$ und $w = v$ auf $\mathfrak{R}$. Dann ist

$$D(v) \leqq D(w).$$

Wird nämlich $L = w - v$ gesetzt, so ist $L \geqq 0$ und

$$D(w) = D(v+L) = D(v) + 2D(v, L) + D(L)$$

---

[27]) Im Fall $n = 2$ sind zwar sehr allgemeine Gebiete (vgl. die weiter unten angeführte Voraussetzung von Lebesgue) behandelt worden, aber auch noch nicht die allgemeinsten regulären Gebiete.

[28]) B. Levi, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22 (1906) S. 293—360.

[29]) G. Fubini, ebenda, 23 (1907) 58—84, 300—301.

[30]) Fubini, a. a. O., S. 76. Die Bezeichnung regulär kommt bei Fubini zwar nicht vor, aber seine Voraussetzungen besagen etwa dasselbe wie die Regularität.

und hieraus folgt die Behauptung, da $D(L) \geqq 0$ und

$$D(v, L) = -\int_{\mathfrak{G}} L \cdot \Delta v \, d\mathfrak{x} \geqq 0$$

ist.

Aber die letzte Gleichung gewinnt man mit Hilfe der Greenschen Formel, und dabei treten u. a. zusätzliche Voraussetzungen über den Rand des Gebiets auf. Daher wird durch Fubinis Beweis tatsächlich nicht die angestrebte Allgemeinheit (beliebige reguläre Gebiete) erreicht.

Lebesgue[31]) behandelt den Fall $n = 2$ und sagt S. 389, daß „la methode s'appliquerait indentiquement" auch für beliebiges n. Aber es wird nicht gesagt, welche Forderungen dann an das Gebiet zu stellen sind. Für $n = 2$ fordert Lebesgue, daß kein Randpunkt umlaufen werden kann, d. h. daß kein Randpunkt im Innern einer beliebig kleinen geschlossenen Jordan-Kurve liegt, die ganz im Gebiet verläuft. Für $n \geqq 3$ genügt diese Bedingung bekanntlich nicht. Daher ist nicht ersichtlich, wie der Beweis nach Lebesgues Methode für $n \geqq 3$ zu führen ist.

Die einzige Arbeit, in der das Problem gerade für $n = 3$ behandelt wird, stammt von S. Zaremba[32]). In dieser Arbeit wird mit einer Minimalfolge $v_1, v_2, \ldots$ wieder die in Nr. 12 eingeführte Folge (21) gebildet und bewiesen, daß diese Folge in $\mathfrak{G}$ gegen eine harmonische Funktion $u(\mathfrak{x})$ konvergiert, welche Lösung des von Zaremba eingeführten „transformierten Dirichletschen Problems" ist. Ist jeder Randpunkt von $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ von außen her durch einen Kegel erreichbar, so ist diese Funktion u Lösung der Variationsaufgabe und der Randwertaufgabe. Der Beweis dieser Tatsachen ist langwierig und wird durch ein gemischtes Verfahren, keineswegs allein durch die sog. direkte Methode der Variationsrechnung erbracht. Eine wesentliche Rolle spielt dabei z. B. Poincarés Auskehrverfahren.

Ein älterer einfacher Beweis von Courant[33]) ist für $n = 2$ ausgeführt und gilt auch nur für diesen Fall.

Später hat Courant gezeigt[34]), wie man auch bei beliebigem n mittels der sog. direkten Methode der Variationsrechnung die Lösbarkeit der Variations- und der Randwertaufgabe beweisen kann, und zwar sogar für beliebige beschränkte Gebiete. Aber dabei ist die Randbedingung in einer von der klassischen abweichenden Art formuliert, nämlich folgendermaßen:

---

[31]) H. Lebesgue, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 24 (1907), S. 371—402.

[32]) Zaremba, a. a. O. Die Arbeit in den Acta mathematica 34 (1911) 293—316 ist zwar später erschienen, aber im Manuskript früher abgeschlossen; in ihr wird der Fall $n = 2$ behandelt.

[33]) R. Courant, Journal für die reine und angewandte Mathematik 144 (1914) 190—211.

[34]) R. Courant-D. Hilbert, a. a. O., Kap. 7.

In $\mathfrak{G}$ ist eine stetige und stückweis stetig differenzierbare Funktion $g(\mathfrak{x})$ gegeben, für die $D(g)$ existiert; $v(\mathfrak{x})$ sei eine Funktion derselben Art. Von ihr wird gesagt, daß sie die durch g bestimmte Randbedingung erfüllt, wenn es eine Folge von Funktionen $\psi_p(\mathfrak{x})$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

jedes ψ_p ist in $\mathfrak{G}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar;

$D(\psi_p)$ existiert 0;

$\psi_p = 0$ in einer gewissen (von p abhängigen) Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}$;

für $p \to \infty$ ist

$$\|v - g - \psi_p\| \to 0 \quad \text{und} \quad D(v - g - \psi_p) \to 0.$$

Daß aus der Lösbarkeit der Randwertaufgabe in diesem Sinne auch ihre Lösbarkeit im klassischen Sinne für ziemlich allgemeine Gebiete folgt, wird nur für $n = 2$ bewiesen. Für $n \geqq 3$ fehlt dieser Nachweis und ist anscheinend auch nicht leicht zu erbringen.

(Eingegangen am 4. Juni 1945.)

Quadratische Formen über quadratischen Körpern.

Von

H. Maaß in Heidelberg.

Es sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper, I der Bereich der ganzen Zahlen in K. Eine quadratische Form über K

$$(1) \qquad \nu = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_i \xi_k \qquad (\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \subset I)$$

heißt gerade und positiv, wenn für beliebige, nicht sämtlich verschwindende $\xi_i \subset I$

$$(2) \qquad \nu \equiv 0\,(2) \text{ und } \nu > 0.$$

Es wird hier nur von solchen positiven geraden Formen (1) die Rede sein, deren Determinante eine Einheit ε ist:

$$(3) \qquad |\alpha_{ik}| = \varepsilon.$$

Quadratische Formen, welche durch eine unimodulare lineare Transformation der Variablen mit Koeffizienten aus I ineinander übergeführt werden können, werden äquivalent genannt. Eine nicht erweiterungsfähige Menge von untereinander äquivalenten Formen heißt eine Klasse.

Im rationalen Zahlkörper R sind folgende Sätze bekannt. Eine positive gerade Form von n Variablen mit der Determinante 1 existiert dann und nur dann, wenn $n \equiv 0\,(8)$. MINKOWSKI[1]) hat als erster eine solche Form von 8 Variablen angegeben. Nach MORDELL[2]) gibt es nur eine Klasse von geraden Formen zu $n = 8$, nach WITT[3]) genau zwei Klassen zu $n = 16$. Analoge Sätze sind auch für den quadratischen Körper $R(\sqrt{5})$ bewiesen worden[4]). Für diesen Körper lautet das Existenzkriterium: $n \equiv 0\,(4)$, $\varepsilon =$ Quadrat einer Einheit. Zu $n = 4$ gibt es genau eine Formenklasse, zu $n = 8$ genau zwei.

In der vorliegenden Arbeit wird für einen beliebigen quadratischen Körper $K = R(\sqrt{a})$ (a quadratfreie natürliche Zahl) die Frage beantwortet, wann es eine positive gerade Form über $R(\sqrt{a})$ von n

---

[1]) H. MINKOWSKI, Gesammelte Abhandlungen I (1911).

[2]) L. J. MORDELL, The definite quadratic forms in eight variables with determinant unity, Journal de Mathématiques pures et appliquees 17 (1938), S. 11—46.

[3]) E. WITT, Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades, Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Universität 14 (1941), S. 323—337.

[4]) H. MAASS, Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$, Math. Annalen 118 (1941), S. 65—84.

Variablen mit der Determinante ε gibt. Es zeigt sich, daß eine solche Form dann und nur dann existiert, wenn

$$\varepsilon > 0,\ n \equiv 0\,(2),\ (-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon \equiv \alpha^2\,(4),\ \alpha \subset I. \tag{4}$$

Darüber hinaus ist es in den Fällen $a \not\equiv 1\,(8)$ stets möglich, gerade Formen unter der Voraussetzung (4) nach einem Verfahren von WITT [3]) zu konstruieren, welchem folgender Gedanke zugrunde liegt. Im Rationalen entspricht jeder Klasse positiver Formen von n Variablen nach MINKOWSKI [1]) ein n-dimensionales Raumgitter. Solche Raumgitter lassen sich übersichtlich durch lineare Kongruenzen definieren und stellen damit ein ausgezeichnetes Hilfsmittel dar, die arithmetischen Eigenschaften quadratischer Formen zu studieren. Bei dem Versuch, gerade Formen über $R(\sqrt{a})$ $(a \not\equiv 1\,(8))$ auf die angegebene Art zu konstruieren, bin ich in Anlehnung an die WITTsche Untersuchung auf folgendes System von Kongruenzen in $R(\sqrt{a})$ geführt worden:

$$\begin{cases} (5')\ x_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-1}) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (5'')\ x_k \equiv \alpha_1 x_n\,(1) & (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ (5''')\ \sum_{k=1}^{n-1} x_k + \alpha_1 x_n \equiv 0\,(\mathfrak{p}). \end{cases} \tag{5}$$

Dabei ist $\mathfrak{p}$ das Primideal, welches 2 teilt, und

$$\alpha_1 = \begin{cases} \sqrt{a}\,\alpha, & \text{wenn } a \equiv 5\,(8),\ n \equiv 4, 6\,(8), \\ \alpha & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

α ist aus (4) zu entnehmen. Zur Bestimmung von α ist im Falle $a \equiv 5\,(8)$ noch ein Zusatz nötig. Aus dem Bestehen der zweiten Kongruenz unter (4) kann unter der Voraussetzung $a \equiv 5\,(8)$ gefolgert werden, daß auch

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon \equiv \alpha^{*2}\,(8),\ \alpha^* \subset I \tag{7}$$

lösbar ist. Es soll dann $\alpha = \alpha^*$ angenommen werden.

Im einzelnen wird nun folgendes bewiesen: Die Menge der Lösungsvektoren

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

des Systems (5) stellt einen I-Modul M mit n-gliedriger Basis, etwa $\mathfrak{x}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, dar:

$$M = I\mathfrak{x}_1 + I\mathfrak{x}_2 + \cdots + I\mathfrak{x}_n. \tag{8}$$

Das ist eine nicht-triviale Aussage, wenn die Idealklassenzahl von $R(\sqrt{a})$ größer als 1 ist. Wir üben auf jeden Vektor $\mathfrak{x} \subset M$ die Abbildung

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \to \mathfrak{y} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\sqrt{\varepsilon}\} \tag{9}$$

aus. Dabei gehe $\mathfrak{x}_i$ in $\mathfrak{y}_i$ und M in

$$N = I\mathfrak{y}_1 + I\mathfrak{y}_2 + \cdots + I\mathfrak{y}_n \tag{10}$$

über. Es ist nun leicht zu sehen, daß $\mathfrak{y}^2 \equiv 0\,(2)$ für $\mathfrak{y} \subset N$ und folglich

$$\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}^* = \tfrac{1}{2}\{(\mathfrak{y}+\mathfrak{y}^*)^2 - \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{y}^{*2}\} \equiv 0\,(1) \text{ für } \mathfrak{y}, \mathfrak{y}^* \subset N.$$

Die quadratische Form

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{y}_i \xi_i\right)^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_i \xi_k, \tag{11}$$

die wir kurz mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen, ist daher gerade und positiv und hat bei geeigneter Normierung der Basisvektoren $\mathfrak{y}_i$ die Determinante

$$|\mathfrak{y}_i \mathfrak{y}_k| = |\alpha_{ik}| = \varepsilon. \tag{12}$$

ε_0 sei eine Grundeinheit von $R(\sqrt{a})$. Da in der Klasse von $\mathfrak{Q}$ immer ein Repräsentant mit der Determinante 1 oder ε_0 aufgefunden werden kann, so bedeutet es keine Einschränkung, wenn im folgenden $\varepsilon = 1$ oder ε_0 angenommen wird.

Die Vektoren $\mathfrak{a} \subset N$, für welche $\mathfrak{a}^2 = 2$ oder $2\varepsilon_0$, fassen wir zu einem Vektordiagramm L zusammen. Die Kenntnis von L ist an sich von Interesse, darüber hinaus aber auch zur Bestimmung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{Q}$ bzw. N[3]) und zur Beantwortung der Frage von Nutzen, wann die Formen $\mathfrak{Q}$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ äquivalent sind. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von N besteht aus den orthogonalen Transformationen von N in sich; unter diesen kommen insbesondere die Spiegelungen an den Normalebenen zu den Vektoren $\mathfrak{a} \subset L$ vor, wie aus der Darstellung einer solchen Spiegelung

$$\mathfrak{y} \to \mathfrak{y} - \varepsilon_0^{-m}(\mathfrak{a}\,\mathfrak{y})\,\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}^2 = 2\varepsilon_0^m, \quad \mathfrak{a} \subset L \tag{13}$$

unmittelbar hervorgeht. $\mathfrak{G}$ enthält also die zu L gehörige Spiegelungsgruppe $\mathfrak{S}$, die aus sämtlichen Spiegelungen (13) erzeugt wird. Die nicht in $\mathfrak{S}$ gelegenen Automorphismen von N können nun auf Grund der von Witt angegebenen Resultate über Spiegelungsgruppen[5]) von Fall zu Fall leicht berechnet werden. Zur Äquivalenz der Formen $\mathfrak{Q}$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ ist offenbar notwendig, daß L gleich viele Vektoren der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2\varepsilon_0}$ enthält. Das ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} &n = 2, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 && \text{oder} \\ &n = 2, \quad \varepsilon = 1, \quad \zeta^2 = 2\varepsilon_0 && \text{oder} \\ &n = 4, \quad \varepsilon = 1, \quad \zeta^2 = 2\varepsilon_0 && (\zeta \subset I). \end{aligned} \tag{14}$$

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend für die Äquivalenz der Formen. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß $2\varepsilon_0$ durch $\mathfrak{Q}$ dann und nur dann dargestellt wird, wenn entweder $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$ oder $a \equiv 5\,(8)$, $n = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\zeta^2 = 7\varepsilon_0$.

Der Ausschluß der Körper $R(\sqrt{a})$ mit $a \equiv 1\,(8)$ scheint eine notwendige Maßnahme zu sein. Es kann nämlich passieren, daß über diesen Körpern keine positiven geraden Formen von n Variablen mit

[5]) E. Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, Abhandl. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Universität 14 (1941), S. 289—322.

der Determinante ε durch Kongruenzen nach beliebigen Idealmoduln zu definieren sind, obgleich die für die Existenz hinreichenden Bedingungen (4) erfüllt sind. Dieser Fall liegt z. B. vor im Körper $R(\sqrt{33})$ für $n = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 23 + 4\sqrt{33}$, wie auf Grund bekannter arithmetischer Sätze leicht festgestellt wird.

Wenn $n \equiv 0(8)$, so wird durch das System

$$(15) \qquad x_i \equiv 0\left(\tfrac{1}{2}\right),\ x_i \equiv x_n(1)\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0(2)$$

eine Klasse von positiven geraden Formen definiert, welche nach WITT [3]) einen rationalen Repräsentanten $\mathfrak{Q}^*$ mit der Determinante 1 enthält. Für $a \equiv 2, 3(4)$ ist diese Formenklasse verschieden von der Formenklasse zu $\mathfrak{Q}$ (mit $\varepsilon = 1$, $\alpha_1 = 1$), da die zugehörigen Automorphismengruppen verschiedene Ordnungen haben. Die Formen $\mathfrak{Q}$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ haben offenbar dieselben Automorphismengruppen, was auch für $\mathfrak{Q}^*$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}^*$ gilt. $\mathfrak{Q}^*$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}^*$ gehören verschiedenen Klassen an, da 2, aber nicht $2\varepsilon_0$ durch $\mathfrak{Q}^*$ dargestellt wird. Infolgedessen repräsentieren die Formen

$$\mathfrak{Q},\ \varepsilon_0\mathfrak{Q},\ \mathfrak{Q}^*,\ \varepsilon_0\mathfrak{Q}^* \qquad (n \equiv 0(8),\ \varepsilon = \alpha = 1)$$

vier verschiedene Klassen über $R(\sqrt{a})$, wenn $a \equiv 2, 3(4)$.

§ 1.

Das Existenzkriterium. Konstruktion von Formen.

Sei (α_{ik}) das Koeffizientenschema einer gegebenen positiven geraden Form über $R(\sqrt{a})$ mit der Determinante ε. Dann läßt sich eine ganzzahlige Matrix U mit der Determinante 1 und Koeffizienten aus I derart bestimmen, daß $U'(\alpha_{ik})U$ einer Kästchenmatrix

$$(16) \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \gamma_1 & \delta_1 & & & \\ & & \beta_2 & \gamma_2 & \\ & & \gamma_2 & \delta_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mod 4 kongruent ist. Außerhalb der quadratischen zweireihigen Kästchen stehen Nullen, und die Diagonalelemente β_i, δ_i sind sämtlich durch 2 teilbar. Die Transformation der Matrix (α_{ik}) mod 4 auf eine Matrix vom Typus (16) kann so vorgenommen werden, daß man zunächst die ersten beiden Zeilen und Spalten von (α_{ik}) reduziert, darauf die nächsten beiden usf. Aus dem Verfahren geht hervor, daß die Variablenzahl n notwendig gerade ist. Determinantenbildung ergibt dann

$$\varepsilon = |\alpha_{ik}| \equiv \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}} (-\gamma_j^2) \equiv (-1)^{\frac{n}{2}} \alpha^2 (4).$$

Damit ist gezeigt, daß die Bedingungen (4) für die Existenz der Formen notwendig sind. Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß die Bedingungen (4) erfüllt sind und beweisen daraus die Existenz einer zugehörigen positiven geraden Form. Offenbar können wir uns auf $n = 2$ und 4 beschränken, da man sich durch Komposition dieser speziellen Formen solche von beliebiger zulässiger Variablenzahl n verschaffen kann.

1. $n = 2$. Da $-\varepsilon \equiv \alpha^2 (4)$, so kann β ganzzahlig aus $4\beta = \alpha^2 + \varepsilon$ bestimmt werden. Die Form mit den Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2\beta \end{pmatrix} \tag{17}$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

2. $n = 4$. Für das Koeffizientenschema der gesuchten Form machen wir den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\beta & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 2\delta & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Darin soll β so bestimmt werden, daß

$$4\beta - 1 = q \tag{19}$$

eine Primzahl wird. Da $|A| = q(4\delta - \alpha^2) - 4\gamma^2$, so ist also

$$4q\delta = 4\gamma^2 + q\alpha^2 + \varepsilon \tag{20}$$

zu fordern. Wenn (19) und (20) befriedigt sind, ist die zu A gehörige Form überdies positiv, da

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\beta \end{vmatrix} = q, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2\beta & \gamma \\ 0 & \gamma & 2\delta \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon + q\alpha^2}{2}$$

total positive Zahlen sind. Die Bedingungen (19) und (20) sind zur Definition von β und δ geeignet, wenn

$$q \equiv -1\,(4), \quad 4\gamma^2 + \varepsilon \equiv 0\,(q), \quad \varepsilon \equiv \alpha^2 (4). \tag{21}$$

Die letzte der drei Kongruenzen kann nach Voraussetzung als erfüllt angesehen werden. Die Primzahl q sei nun so bestimmt, daß

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = -1 \quad \text{und} \quad \varepsilon \not\equiv 1\,(q). \tag{22}$$

Die erste Kongruenz von (21) ist dann befriedigt; außerdem bleibt das Ideal (q) in $R(\sqrt{a})$ unzerlegt, ist also ein Primideal $\mathfrak{q}$. Es braucht dann nur noch gezeigt zu werden, daß $-\varepsilon$ quadratischer Rest mod $\mathfrak{q}$ ist oder damit gleichwertig, daß $\mathfrak{q}$ im Körper $R(\sqrt{a}, \sqrt{-\varepsilon})$ vollständig zerfällt. $R(\sqrt{a}, \sqrt{-\varepsilon})$ enthält die imaginär quadratischen Körper $R(\sqrt{b})$ und $R(\sqrt{ab})$, wobei $\sqrt{b} = \sqrt{-\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}}$. In einem dieser Körper zer-

fällt das Ideal (q), da die Restsymbole $\left(\frac{b}{q}\right)$ und $\left(\frac{ab}{q}\right)$ verschiedene Werte haben ($q|b$ ist durch $\varepsilon \not\equiv 1\,(q)$ ausgeschlossen). $\mathfrak{q} = (q)$ muß also auch in $R(\sqrt{a}, \sqrt{-\varepsilon})$ zerfallen, q. e. d. Wir formulieren das Ergebnis in

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer positiven geraden Form über $R(\sqrt{a})$ von n Variablen mit der Determinante ε sind die Forderungen* (4).

Wir stellen nun eine Reihe von Sätzen zusammen, die ihrer Natur nach elementar aber im Zusammenhang mit den hier behandelten Fragen von Interesse sind. Um eine kurze Ausdrucksweise anzustreben, verwenden wir folgende Termini. Eine zu 2 prime Zahl aus l heißt primär bzw. hyperprimär, wenn sie quadratischer Rest mod 4 bzw. mod 8 ist. Mit $\mathbf{N}\alpha\,(\alpha \subset R(\sqrt{a}))$ bezeichnen wir die Norm von α.

Satz 2: *Die Zahl -1 ist in $R(\sqrt{a})$ dann und nur dann primär, wenn $a \equiv 3\,(4)$.*

Satz 3. *In $R(\sqrt{a})$ mit $a \equiv 3\,(4)$ sei ε_0 (und damit auch $-\varepsilon_0$) primär; dann ist das Primideal $\mathfrak{p}$, welches 2 teilt, kein Hauptideal.*

Satz 4. *In $R(\sqrt{a})$ mit $a \equiv 1\,(4)$ ist eine der beiden Grundeinheiten ε_0 und $-\varepsilon_0$ dann und nur dann primär, wenn $\mathbf{N}\varepsilon_0 = 1$.*

Satz 5. *Wenn in $R(\sqrt{a})$ mit $a \equiv 5\,(8)$ eine der Einheiten ε_0 und $-\varepsilon_0$ primär ist, dann ist dieselbe auch hyperprimär.*

Der Beweis von Satz 2 darf übergangen werden. Satz 3 ergibt sich aus folgender Bemerkung: Wenn $(2) = \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{p} = (\zeta)$, so ist etwa $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$ und dann $\zeta^2 \equiv 2\sqrt{a}\,(4)$, also $\varepsilon_0 \equiv \sqrt{a}\,(2)$. $\sqrt{a}$ ist aber kein quadratischer Rest mod 2. Zum Beweis der letzten beiden Sätze wählt man zweckmäßig in l folgende Minimalbasis:

$$\omega_1 = \frac{1+\sqrt{a}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1-\sqrt{a}}{2}.$$

Sei nun $\varepsilon_0 = u\omega_1 + v\omega_2$, $\alpha = x\omega_1 + y\omega_2$. Die Kongruenz $\pm\varepsilon_0 \equiv \alpha^2\,(2^m)$ bedeutet dann

$$\left.\begin{aligned} \pm u &\equiv x^2 + l(x-y)^2, \\ \pm v &\equiv y^2 + l(x-y)^2 \end{aligned}\right\} (2^m) \qquad \left(l = \frac{a-1}{4}\right).$$

Man überzeugt sich leicht von der Auflösbarkeit dieses Systems in den Fällen $a \equiv 1\,(8)$, $m = 2$ und $a \equiv 5\,(8)$, $m = 3$ unter der Voraussetzung $\mathbf{N}\varepsilon_0 = uv - l(u-v)^2 = 1$.

Wir befassen uns nun mit dem Kongruenzensystem (5).

Satz 6. *Der für $a \not\equiv 1\,(8)$ durch das System* (5) *oben erklärte l-Modul M hat folgende Eigenschaften:*

1. *Für $\mathfrak{y} \subset N$ ist $\mathfrak{y}^2 \equiv 0\,(2)$.*

2. *Es gibt in N eine l-Basis $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_n$ derart, daß die mit den Vektoren $\mathfrak{y}_i$ gebildete Determinante den Wert $\sqrt{\varepsilon}$ hat.*

N definiert also eine Klasse von positiven geraden Formen, welche durch die Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} \mathfrak{y}_i \mathfrak{y}_k \xi_i \xi_k \tag{23}$$

mit der Determinante ε repräsentiert wird.

Beweis. 1. Aus (5″) und (5‴) folgt

$$x_i = \alpha_1 x_n + \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \gamma_i \mathfrak{C} I,$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \equiv -n\alpha_1 x_n (\mathfrak{p}),$$

also

$$\mathfrak{y}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \varepsilon x_n^2 \equiv [(n-1)\alpha_1^2 + \varepsilon] x_n^2 + 2\alpha_1 x_n \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\right)^2$$
$$\equiv [(n-1)\alpha_1^2 + \varepsilon] x_n^2 - 2n\alpha_1^2 x_n^2 + n^2 \alpha_1^2 x_n^2 \equiv [(n-1)\alpha_1^2 + \varepsilon] x_n^2. \tag{2}$$

Auf Grund der Voraussetzung (4) und unserer Festsetzung (6) α_1 betreffend ergibt sich nun $\mathfrak{y}^2 \equiv 0\,(2)$.

2. In $R(\sqrt{a})$ sollen Zahlen $\beta, \gamma_1, \gamma_2$ so bestimmt werden, daß die n Vektoren

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_1 &= \{1, -1, 0, \ldots, 0, 0, 0\},\\
\mathfrak{x}_2 &= \{0, -1, 1, \ldots, 0, 0, 0\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{x}_{n-2} &= \{0, 0, 0, \ldots, -1, 1, 0\},\\
\mathfrak{x}_{n-1} &= \{0, 0, 0, \ldots, 0, 1, -\beta\},\\
\mathfrak{x}_n &= \{\gamma_1, -\gamma_1, \gamma_1, \ldots, -\gamma_1, \gamma_1, \gamma_2\}
\end{aligned} \tag{24}$$

Lösungsvektoren des Systems (5) darstellen, und die aus ihnen gebildete Determinante den Wert $(-1)^{\frac{n}{2}}$ hat. Es sind also folgende Bedingungen zu befriedigen:

$$\begin{gathered}
\beta \equiv 0\,(1), \quad \gamma_1 \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-1}), \quad \gamma_2 \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-1})\\
1 - \alpha_1 \beta \equiv 0\,(\mathfrak{p}), \quad \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2 \equiv 0\,(\mathfrak{p}),\\
\gamma_1 \beta + \gamma_2 = -1.
\end{gathered} \tag{25}$$

Die letzte Gleichung benutzen wir zur Definition von γ_2. Für β und γ_1 verbleiben die Forderungen:

$$\begin{gathered}
\beta \equiv 0\,(1), \quad \gamma_1 \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-1}),\\
1 - \alpha_1 \beta \equiv 0\,(\mathfrak{p}), \quad \gamma_1 (1 - \alpha_1 \beta) \equiv \alpha_1\,(\mathfrak{p}),
\end{gathered} \tag{26}$$

die ersichtlich erfüllt werden können. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Vektoren (24) eine Basis für den Lösungsmodul M bilden. Setzen wir für $\mathfrak{x} \mathfrak{C} M$:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathfrak{x}_i,$$

so ist zu beweisen, daß die Koeffizienten ξ_i in I liegen. Für die Komponenten x_i von $\mathfrak{x}$ folgt zunächst

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i \beta + x_n = -\xi_n,$$

also nach (5‴) und (25)

$$\xi_n \equiv (\alpha_1 \beta - 1)\, x_n \equiv 0\,(1).$$

Der Vektor $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} - \xi_n \mathfrak{x}_n = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ liegt demnach in M und für seine Komponenten besteht die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^* \beta + x_n^* = 0.$$

Nach (25) und (5) ist nun zu schließen, daß

$$x_n^* = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \gamma_2 - x_n \gamma_1\right) \beta \equiv \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \alpha_1 x_n\right) \gamma_2 \beta \equiv 0\,(1).$$

Zufolge (5″) ist dann auch $x_i^* \equiv 0\,(1)$, und $\mathfrak{x}^*$ kann somit als ganzzahlige Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$ bestimmt werden. Damit ist die Basiseigenschaft der $\mathfrak{x}_i$ für M bewiesen. Die zu den Vektoren $\mathfrak{x}_i$ nach (9) berechneten Bildvektoren $\mathfrak{y}_i$ haben die in Satz 6 formulierten Eigenschaften, q. e. d.

Es ist übrigens leicht zu beweisen, daß die im Körper zu (23) konjugierte quadratische Form in derselben Formenklasse liegt.

In den nun folgenden Paragraphen beschränken wir uns auf $\varepsilon = 1$ und ε_0. **N** und **S** werden als Norm- und Spurzeichen in $R(\sqrt{a})$ verwendet. Die zu einer Körperzahl ξ konjugierte bezeichnen wir mit ξ'.

§ 2.

Berechnung des Vektordiagramms L für $a \equiv 5\,(8)$.

Wir wählen in $R(\sqrt{a})$ für $a \equiv 5\,(8)$ die feste Minimalbasis

$$\omega_1 = \frac{1+\sqrt{a}}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1-\sqrt{a}}{2} \qquad \left(l = \frac{a-1}{4} \equiv 1\,(2)\right) \tag{27}$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ die Einheitsvektoren des n-dimensionalen Raumes. Ein Lösungsvektor

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathfrak{e}_i \tag{28}$$

des Systems (5) gestattet dann die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u}\,\omega_1 + \mathfrak{v}\,\omega_2 \tag{29}$$

mit rationalen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \mathfrak{u}^* + u_n \mathfrak{e}_n, \\ \mathfrak{v} &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathfrak{v}^* + v_n \mathfrak{e}_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Aus (29) folgt

$$\mathfrak{x}^2 = [\mathfrak{u}^2 + l(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})^2]\,\omega_1 + [\mathfrak{v}^2 + l(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})^2]\,\omega_2, \tag{31}$$

$$\mathbf{N}\,\mathfrak{x}^2 = [\mathfrak{u}\mathfrak{v} - l(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})^2]^2 + a[\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}^2 - (\mathfrak{u}\mathfrak{v})^2], \tag{32}$$

und für $\mathfrak{y} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\sqrt{\varepsilon}\}$ gilt ähnlich

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{u}^*\omega_1 + \mathfrak{v}^*\omega_2 + x_n\sqrt{\varepsilon}\,\mathfrak{e}_n, \tag{33}$$

$$\mathfrak{y}^2 = [\mathfrak{u}^{*2} + l(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{v}^*)^2]\,\omega_1 + [\mathfrak{v}^{*2} + l(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{v}^*)^2]\,\omega_2 + x_n^2\varepsilon, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\,\mathfrak{y}^2 = {} & [\mathfrak{u}^*\mathfrak{v}^* - l(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{v}^*)^2]^2 + a[\mathfrak{u}^{*2}\mathfrak{v}^{*2} - (\mathfrak{u}^*\mathfrak{v}^*)^2] \\ & + [u_n v_n - l(u_n - v_n)^2]^2 + \mathbf{S}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 x_n'^2\,\varepsilon'\right),\end{aligned} \tag{35}$$

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{u}^{*2} + \mathfrak{v}^{*2} + 2\,l(\mathfrak{u}^*-\mathfrak{v}^*)^2 + \mathbf{S}\,x_n^2\varepsilon. \tag{36}$$

Wir behandeln nun nacheinander die Fälle $\varepsilon = 1$ und ε_0.

1. $\varepsilon = 1$. Es ist dann $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$, $n \equiv 0(4)$, $\alpha = 1$, $\alpha_1 \equiv \alpha(2)$, und damit geht (5″) über in $x_i \equiv x_n(1)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Komponenten von $\mathfrak{u}$ und ebenso die von $\mathfrak{v}$ sind also durchweg ganz- oder halbzahlig, so daß wegen $n \equiv 0(4)$ die Kongruenzen

$$\mathfrak{u}^2 \equiv \mathfrak{v}^2 \equiv 0(1), \quad \mathfrak{u}\mathfrak{v} \equiv 0(\tfrac{1}{2}) \tag{37}$$

bestehen.

11. Wir beweisen zunächst, daß $2\,\varepsilon_0$ durch $\mathfrak{Q}$ nicht dargestellt wird. Das ist richtig für $a \equiv 5, 13$, da in diesen beiden Körpern $\mathbf{N}\,\varepsilon_0 = -1$, so daß wir $a \geqq 21$ voraussetzen können. Wir nehmen $\mathbf{N}\,\mathfrak{x}^2 = 4$ an. Aus (32) folgt dann nach einer im folgenden häufig anzuwendenden Schlußweise die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$. Das ist ein Ergebnis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, die in der zweiten eckigen Klammer auf der rechten Seite von (32) wirksam wird; dabei ist zu beachten, daß dieser Klammerausdruck zufolge (37) höchstens den Nenner 4 hat. Wir entnehmen aus (32) weiter, daß $\mathfrak{u} \neq 0$ und $\mathfrak{v} \neq 0$ und schließen nun:

$$\mathfrak{v} = \frac{r}{s}\mathfrak{u}, \quad (r,s) = 1, \quad s > 0$$

sowie nach (32):

$$\frac{\mathfrak{u}^2}{s^2}[sr - l(s-r)] = \pm 2.$$

Der Klammerausdruck ist nicht durch 2 teilbar; $\frac{\mathfrak{u}^2}{s^2}$ ist nach (37) ganzzahlig, also ist $\frac{\mathfrak{u}^2}{s^2} \equiv 0(2)$, und aus $\mathfrak{x}^2 = \frac{\mathfrak{u}^2}{s^2}(s\,\omega_1 + r\,\omega_2)^2$ folgt $\mathfrak{x}^2 = 2\,\varepsilon_0^{2m}$, q. e. d.

Wir bestimmen nun die Lösungen von

12. $\mathfrak{x}^2 = 2$. Die Gleichung (31) zerfällt in das rationale System

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}^2 + l(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})^2 &= 2,\\ \mathfrak{v}^2 + l(\mathfrak{u}-\mathfrak{v})^2 &= 2.\end{aligned}$$

Wenn $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{v}$, dann ist notwendig $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = 1$, $l = 1$, $(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})^2 = 1$, also $a = 5$, $\mathfrak{u}\mathfrak{v} = \frac{1}{2}$. Da entweder $\mathfrak{u}$ oder $\mathfrak{v}$ halbzahlig ist, so ist $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = 1$ nur mit $n = 4$ verträglich und es kommen folgende Vektoren als Lösungen in Frage ($\sigma_i = \pm 1$):

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \sigma_i \mathfrak{e}_i \\ \mathfrak{v} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \sigma_k \mathfrak{e}_k \end{cases} \quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \sigma_k \mathfrak{e}_k \\ \mathfrak{v} = \sigma_i \mathfrak{e}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \sigma_k \mathfrak{e}_k \\ \mathfrak{v} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \sigma_k \mathfrak{e}_k - \sigma_i \mathfrak{e}_i. \end{cases}$$

Die Bedingungen, die sich aus dem System (5) ergeben, sind am besten zu übersehen, wenn man das System (5) auf $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ umschreibt ($\alpha_1 = \sqrt{a}$):

$$(38) \quad \left.\begin{array}{ll} u_i \equiv 0\,(\tfrac{1}{2}), & u_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} v_k \quad (1), \\ v_i \equiv 0\,(\tfrac{1}{2}), & v_i \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)\,(1) \end{array}\right\} \text{ für } n \equiv 4\,(8).$$

Es ergeben sich dann folgende Lösungsvektoren

$$(39) \quad \left.\begin{array}{ll} \sigma_i \frac{3+\sqrt{5}}{4} \mathfrak{e}_i + \frac{1-\sqrt{5}}{4} \sum_{k \neq i} \sigma_k \mathfrak{e}_k, & \prod_{k=1}^{4} \sigma_k = 1, \\ \sigma_i \frac{3-\sqrt{5}}{4} \mathfrak{e}_i + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \sum_{k \neq i} \sigma_k \mathfrak{e}_k, & \prod_{k=1}^{4} \sigma_k = -1, \\ \sigma_i \frac{\sqrt{5}}{2} \mathfrak{e}_i + \frac{1}{2} \sum_{k \neq i} \sigma_k \mathfrak{e}_k, & \prod_{k=1}^{4} \sigma_k = 1 \end{array}\right\} \text{ für } a = 5,\ n = 4.$$

Es bleibt noch $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}$ zu diskutieren. In diesem Fall ist $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = 2$. Halbzahlige Lösungen liegen nur für $n = 8$ vor; es ist dann $\alpha_1 = 1$, und die Lösungsvektoren lauten

$$(40) \quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{8} \sigma_k \mathfrak{e}_k, \quad \prod_{k=1}^{8} \sigma_k = 1 \quad \text{für} \quad n = 8.$$

Die ganzzahligen Lösungen haben die Gestalt

$$(41) \quad \pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k, \quad i < k.$$

2. $\varepsilon = \varepsilon_0$. Es handelt sich um die Körper $R(\sqrt{a})$ mit $\mathbf{N}\varepsilon_0 = 1$, also ist $a = 21$ oder $a \geqq 69$ und entsprechend $l = 5$ oder $l \geqq 17$. Nach (5″) sind die Komponenten von $\mathfrak{u}^*$ und ebenso die von $\mathfrak{v}^*$ durchweg ganz- oder halbzahlig.

21. $\mathfrak{v}^2 = 2$. Der Fall $\mathfrak{u}^* \neq \mathfrak{v}^*$ liegt zufolge (36) nur vor, wenn $l = 5$, $(\mathfrak{u}^* - \mathfrak{v}^*)^2 = \frac{1}{4}$, also $n = 2$. Für $a = 21$ ist $\varepsilon_0 = 3\omega_1 + 2\omega_2$ und $-\varepsilon_0 \equiv \omega_2^2\,(8)$. Aus der Spurrelation (36) ergibt sich dann $u_1 = 0$, $v_1 = \frac{\sigma_1}{2}$ oder $u_1 = \frac{\sigma_1}{2}$, $v_1 = 0$. Dazu berechnet man nach (34) die

Komponente $x_2 = \frac{\sigma_2}{2}$ bzw. $x_2 = \frac{\sigma_2}{2}\varepsilon_0'$. In beiden Fällen wird (5) befriedigt, wenn $\sigma_1\sigma_2 = -1$. Wir erhalten vier Lösungsvektoren:

$$(42)\quad \left.\begin{array}{l} \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\,\mathfrak{e}_1 - \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}\,\mathfrak{e}_2\right) \\ \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\,\mathfrak{e}_1 - \sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}\,\mathfrak{e}_2\right) \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad a = 21,\ n = 2.$$

Wenn $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{v}^*$, so ist nach (34) $2 = \mathfrak{u}^{*2} + x_n^2\varepsilon_0$. Für halbzahliges $\mathfrak{u}^*$ ist zu schließen, daß $x_i = u_i = \frac{\sigma_i}{2}$ für $i < n$ und daher $\frac{9-n}{4} = \frac{p}{4} = x_n^2\varepsilon_0$. Es kommen also nur die Variablenzahlen $n = 2, 4, 6$ in Frage; für diese n ist $p = 9 - n$ eine Primzahl, welche a teilen muß. Sei $\zeta^2 = p\,\varepsilon_0$, dann können wir uns $\alpha_1 = \zeta$ gewählt denken. Mit $x_n = \frac{\sigma_n}{2}|\zeta'|$ erhält man zufolge (5‴) die Bedingung $\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i \equiv (n-1)\,\sigma_n \operatorname{sgn}\zeta\,(4)$, aus der sich folgende Lösungsvektoren ergeben:

$$(43)\quad \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_i\mathfrak{e}_i + \sigma_n\sqrt{p}\,\mathfrak{e}_n\right),\quad \prod_{i=1}^{n}\sigma_i = \operatorname{sgn}\zeta \begin{cases} \text{für} & n = 2, 4, 6, \\ & p = 9 - n, \\ & \zeta^2 = p\,\varepsilon_0 \quad (\alpha_1 = \zeta). \end{cases}$$

Für ganzzahliges $\mathfrak{u}^*$ ist notwendig $x_n = 0$. Man erhält damit die Lösungsvektoren

$$(44)\qquad \pm\mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k,\ i < k < n.$$

22. $\mathfrak{y}^2 = 2\,\varepsilon_0$. Wir beweisen zunächst, daß $\mathfrak{u}^*$ und $\mathfrak{v}^*$ linear abhängig sind. Aus der Unabhängigkeit der Vektoren würde nämlich nach (35) folgen, daß $a = 21$ und $\mathfrak{u}^*, \mathfrak{v}^*$ beide halbzahlig wären. (36) ergibt dann einen Widerspruch. Nach (34) ist

$$|x_n| \leqq \sqrt{2},\quad |x_n'| \leqq \sqrt{2}.$$

Für irrationales x_n werden diese Ungleichungen nur befriedigt, wenn $a = 21$ und

$$x_n = \frac{\sigma_n}{2}\,\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \text{oder} \quad x_n = \frac{\sigma_n}{2}\,\frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Im ersten Fall resultiert aus (36) $\mathfrak{u}^* = \mathfrak{v}^*$, $\mathfrak{u}^{*2} = \frac{1}{4}$, $n = 2$, also $x_1 = \frac{\sigma_1}{2}$. $\sigma_1\sigma_2 = 1$ wird durch (5‴) gefordert. Im zweiten Fall ist (34) äquivalent mit

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{2} &= \mathfrak{u}^{*2} + 5\,(\mathfrak{u}^* - \mathfrak{v}^*)^2, \\ \tfrac{9}{4} &= \mathfrak{v}^{*2} + 5\,(\mathfrak{u}^* - \mathfrak{v}^*)^2. \end{aligned}$$

Aus diesem System ist zu ersehen, daß $\mathfrak{u}^*, \mathfrak{v}^*$ nicht beide halbzahlig, dann aber, daß $\mathfrak{u}^*$ halbzahlig und $\mathfrak{v}^*$ ganzzahlig sind. Man erhält somit $(\mathfrak{u}^* - \mathfrak{v}^*)^2 = \frac{1}{4}$, $\mathfrak{v}^{*2} = 1$, $\mathfrak{u}^{*2} = \frac{9}{4}$, also $n = 2$ und $u_1 = \frac{3}{2}\sigma_1$,

$v_1 = 0$. Wie oben ist auch hier $\sigma_1 \sigma_2 = 1$. Die vier Lösungsvektoren lauten:

$$(45)\quad \left.\begin{aligned} &\pm\frac{1}{2}\left(\mathfrak{e}_1 + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}\,\mathfrak{e}_2\right)\\ &\pm\frac{1}{2}\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\,\mathfrak{e}_1 + \frac{1-\sqrt{21}}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}\,\mathfrak{e}_2\right)\end{aligned}\right\} \text{ für } a = 21,\ n = 2.$$

Wir diskutieren den Fall rationaler x_n. Die lineare Abhängigkeit von $\mathfrak{u}^*$ und $\mathfrak{v}^*$ besagt, daß

$$\mathfrak{u}^* = s\mathfrak{w},\quad \mathfrak{v}^* = r\mathfrak{w},\quad (r,s) = 1,$$

und führt über (34) zu

$$2\varepsilon_0 = \mathfrak{w}^2(s\omega_1 + r\omega_2)^2 + x_n^2\varepsilon_0.$$

Mit x_n wären auch $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$ und damit $\mathfrak{w}$ ganzzahlig, da der Nenner von $\mathfrak{w}$ sowohl r als auch s teilen würde. Das führt zu einem Widerspruch mit der letzten Gleichung. Mögliche halbzahlige Werte von x_n sind $x_n = \frac{\sigma_n}{2}$. Da $2\mathfrak{w}$ ganzzahlig ist, so folgt aus $7\varepsilon_0 = (2\mathfrak{w})^2\zeta'$, $\zeta = s\omega_1 + r\omega_2$, daß $\mathfrak{w} = \frac{\sigma_i}{2}\mathfrak{e}_i$, $i < n$, also $n = 2$ und $\zeta^2 = 7\varepsilon_0$. Wie bei der Herleitung von (43) ergeben sich jetzt die Lösungsvektoren

$$(46)\quad \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2}(\sigma_1\sqrt{7}\,\mathfrak{e}_1 + \sigma_2\mathfrak{e}_2),\ \sigma_1\sigma_2 = -\operatorname{sgn}\zeta \begin{cases}\text{für } n = 2,\\ \zeta^2 = 7\varepsilon_0 \quad (\alpha_1 = \zeta).\end{cases}$$

Die Vektordiagramme L sind im allgemeinen irreduzibel, d. h. nicht in zwei zu einander orthogonale Teilmengen zerlegbar, und stimmen bis auf eine Ähnlichkeitstransformation mit den von Witt[5]) aufgestellten Diagrammen überein. Wir behalten für diese die Wittsche Bezeichnung A_n^*, B_n^*, ... bei. Die Relation $L \sim L^*$ bedeute die Ähnlichkeit der Diagramme L und L^*. Zusammenfassend stellen wir dann fest:

Satz 7: *Für $a \equiv 5\,(8)$ setzt sich L aus folgenden Vektoren zusammen:*

1. $\varepsilon = 1$, $n = 4$, $a = 5$:	(39) + (41)	$\sim G_4^*$
2. $\varepsilon = 1$, $n = 8$:	(40) + (41)	$\sim E_8^*$
3. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 2$, $a = 21$:	(42) + (43) + (45) + (46)	$\sim D_{(9)}^*\,(\lambda < 1)$
4. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 2$, $a > 21$, $\zeta^2 = 7\varepsilon_0$:	(43) + (46)	$\sim D_{(9)}^*\,(\lambda < 1)$
5. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 4$, $\zeta^2 = 5\varepsilon_0$:	(43) + (44)	$\sim A_4^*$
6. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 6$, $\zeta^2 = 3\varepsilon_0$:	(43) + (44)	$\sim E_6^*$
7. $\varepsilon = 1$ *in allen übrigen Fällen*:	(41)	$\sim B_n^*$
8. $\varepsilon = \varepsilon_0$ „ „ „ „ :	(44)	$\sim B_{n-1}^*$

(*dabei ist B_1^* leer, $B_2^* \sim D_{(9)}^*\,(\lambda = 1)$, $B_3^* \sim A_3^*$*).

Die Zahl 2 wird durch die Form $\mathfrak{Q}$ entsprechend den acht Fällen $120, 240, 6, 2, 20, 72, 2n(n-1), 2(n-1)(n-2)$ *mal dargestellt;* $2\varepsilon_0$ *wird im 3. Fall 6 mal, im 4. Fall 2 mal und sonst nicht dargestellt.*

§ 3.

Berechnung des Vektordiagramms L für $a \equiv 2, 3\,(4)$.

Das Formelsystem (27) bis (36) ist jetzt entsprechend der Wahl von $1, \sqrt{a}$ als Minimalbasis in $R(\sqrt{a})$ mit $a \equiv 2, 3\,(4)$ zu modifizieren:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}\sqrt{a}, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \mathfrak{u}^* + u_n \mathfrak{e}_n, \\ \mathfrak{v} &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathfrak{v}^* + v_n \mathfrak{e}_n, \end{aligned} \tag{48}$$

$$\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{u}^2 + a\mathfrak{v}^2 + 2\,\mathfrak{u}\mathfrak{v}\sqrt{a}, \tag{49}$$

$$\mathbf{N}\mathfrak{x}^2 = (\mathfrak{u}^2 - a\mathfrak{v}^2)^2 + 4a[\mathfrak{u}^2\mathfrak{v}^2 - (\mathfrak{u}\mathfrak{v})^2], \tag{50}$$

$$\mathfrak{y} = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\sqrt{\varepsilon}\} = \mathfrak{u}^* + \mathfrak{v}^*\sqrt{a} + x_n\sqrt{\varepsilon}\,\mathfrak{e}_n, \tag{51}$$

$$\mathfrak{y}^2 = \mathfrak{u}^{*2} + a\mathfrak{v}^{*2} + 2\,\mathfrak{u}^*\mathfrak{v}^*\sqrt{a} + x_n^2\varepsilon, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}\mathfrak{y}^2 = {} & (\mathfrak{u}^{*2} - a\mathfrak{v}^{*2})^2 + 4a[\mathfrak{u}^{*2}\mathfrak{v}^{*2} - (\mathfrak{u}^*\mathfrak{v}^*)^2] \\ & + (u_n^2 - a v_n)^2 + \mathbf{S}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 x_n'^2 \varepsilon'\right), \end{aligned} \tag{53}$$

$$\mathbf{S}\mathfrak{y}^2 = 2(\mathfrak{u}^{*2} + a\mathfrak{v}^{*2}) + \mathbf{S}\,x_n^2\varepsilon. \tag{54}$$

Da $\alpha_1 = \alpha \equiv 1\,(\mathfrak{p})$, so sind nach (5″) die Komponenten von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ durchweg ganzzahlig oder halbzahlig, woraus

$$\mathfrak{u}^2 \equiv \mathfrak{v}^2 \equiv \mathfrak{u}\mathfrak{v} \equiv 0\,(\tfrac{1}{2})$$

zu schließen ist. Wir bestimmen nun die Darstellungen $\mathfrak{y}^2 = 2$ und $\mathfrak{y}^2 = 2\varepsilon_0$.

1. $\varepsilon = 1$. Es ist dann $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$.

11. $\mathfrak{x}^2 = 2$. Die Gleichung (49) zerfällt in

$$2 = \mathfrak{u}^2 + a\mathfrak{v}^2, \quad \mathfrak{u}\mathfrak{v} = 0. \tag{55}$$

Wenn $\mathfrak{v} \neq 0$, so ist $a = 2$ oder 3. Für $a = 2$ kommt nur $n \equiv 0\,(4)$ in Frage, so daß $\mathfrak{u}^2 \equiv \mathfrak{v}^2 \equiv 0\,(1)$ und zufolge (55) $\mathfrak{u} = 0$, $\mathfrak{v}^2 = 1$. Die Lösungsvektoren mit halbzahligem $\mathfrak{v}$ lauten daher:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \quad \text{für} \quad n = 4,\ a = 2 \tag{56}$$

und die mit ganzzahligem $\mathfrak{v}$:

$$\pm\sqrt{2}\,\mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad a = 2. \tag{57}$$

Für $a = 3$ erhält man $\mathfrak{u}^2 = \mathfrak{v}^2 = \frac{1}{2}$, $\mathfrak{u}\mathfrak{v} = 0$ und damit die Lösungsvektoren

$$(58) \quad \pm \frac{1+\sigma\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_1 \pm \frac{1-\sigma\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_2, \quad \sigma = \pm 1, \quad \text{für} \quad n = 2, \ a = 3.$$

$\mathfrak{v} = 0$ liefert nur die ganzzahligen Lösungsvektoren

$$(59) \quad \pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k. \quad i < k.$$

12. $\mathfrak{x}^2 = 2\varepsilon_0$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ folgt nach (50), daß $a = 3$ (in $R(\sqrt{2})$ ist $\mathbf{N}\varepsilon_0 = -1$) und $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ beide halbzahlig sind. Mit $\varepsilon_0 = 2 + \sqrt{3}$ geht (49) über in

$$4 = \mathfrak{u}^2 + 3\mathfrak{v}^2, \quad 1 = \mathfrak{u}\mathfrak{v}.$$

Da $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ unabhängig und halbzahlig sind, so ist $n = 2$. Man findet dann leicht die Lösungsvektoren

$$(60) \quad \left.\begin{array}{l} \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_1 \pm \frac{3+\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_2 \\ \pm \frac{3+\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_1 \pm \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathfrak{e}_2 \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad n = 2, \ a = 3.$$

Wir können nun voraussetzen, daß $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ linear abhängig sind:

$$\mathfrak{v} = r\mathfrak{w}, \quad \mathfrak{u} = s\mathfrak{w}, \quad (r, s) = 1.$$

$2\mathfrak{w}^2$ ist offenbar ganzzahlig. Nach (50) ist $\pm 2 = \mathfrak{w}^2(s^2 - ar^2)$. Da 4 kein Teiler von $s^2 - ar^2$ ist, so ist $\mathfrak{w}^2$ ganzzahlig. Nach (50) ergibt sich dann $\mathfrak{w}^2 = 1$ und $\xi^2 = 2\varepsilon_0$ mit $\xi = s + r\sqrt{a}$, d. h. daß das Primideal $\mathfrak{p}$, welches 2 teilt, ein Hauptideal ist. Die ganzzahligen $\mathfrak{w} = \pm \mathfrak{e}_i$ ergeben die Lösungsvektoren

$$(61) \quad \pm \xi \mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad \xi^2 = 2\varepsilon_0$$

und die halbzahligen $\mathfrak{w} = \frac{1}{2}(\pm \mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4)$ für $n = 4$ ergeben

$$(62) \quad \frac{\xi}{2}(\pm \mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4) \quad \text{für} \quad n = 4, \ \xi^2 = 2\varepsilon_0$$

2. $\varepsilon = \varepsilon_0$. Es ist dann $a = 6$ oder 14 oder $a \geqq 22$.

21. $\mathfrak{y}^2 = 2$. Nach (54) ist $\mathfrak{v}^* \neq 0$ nur mit $a = 6$, $n = 2$, $\mathfrak{v}^{*2} = \frac{1}{4}$ verträglich. Da für gerade a der Vektor $\mathfrak{u}$ ganzzahlig ist, so ist nach (54) $\mathfrak{u}^* = 0$ und nach (52) $x_2 = \pm \frac{2-\sqrt{6}}{2}$, dazu kommt $x_1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$. Es ergeben sich somit die Lösungsvektoren

$$(63) \quad \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\mathfrak{e}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{e}_2 \quad \text{für} \quad n = 2, \ a = 6.$$

Wenn $\mathfrak{v}^* = 0$, dann sind $\mathfrak{u}, x_n$ ganzzahlig und aus $2 = \mathfrak{u}^{*2} + x_n^2\varepsilon_0$ leitet man sofort die Lösungsvektoren

$$(64) \quad \pm \sqrt{2}\mathfrak{e}_n \quad \text{für} \quad \xi^2 = 2\varepsilon_0$$

und

(65) $$\pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k, \quad i < k < n$$

ab.

22. $\mathfrak{y}^2 = 2\varepsilon_0$. Wären $\mathfrak{u}^*$ und $\mathfrak{v}^*$ linear unabhängig, so würde nach (53) $a = 6$ oder 14 folgen. Da aber für gerade a der Vektor $\mathfrak{u}$ ganzzahlig ist, so kommen zufolge (53) auch $a = 6$ und 14 nicht vor, und wir können $\mathfrak{v}^* = r\mathfrak{w}$, $\mathfrak{u}^* = s\mathfrak{w}$, $(r, s) = 1$ annehmen. Nach (52) ist mit $\zeta = s + r\sqrt{a}$:

(66) $$2\varepsilon_0 = \mathfrak{w}^2\zeta^2 + x_n^2\varepsilon_0,$$

woraus insbesondere $|x_n| \leqq \sqrt{2}$, $|x_n'| \leqq \sqrt{2}$ folgt. Diese Ungleichungen sind für irrationales x_n nur erfüllt, wenn $a = 6$ und $x_n = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Da $2\mathfrak{w}$ ganzzahlig, so ergibt (66) $\mathfrak{w}^2 = \frac{1}{4}$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$. Also ist $n = 2$. $\mathfrak{w} = \pm\frac{1}{2}\mathfrak{e}_1$, $x_1 = \pm\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, woraus die Lösungsvektoren

(67) $$\frac{2+\sqrt{6}}{2}(\pm\mathfrak{e}_1 \pm \sqrt{3}\,\mathfrak{e}_2) \quad \text{für} \quad n = 2,\ a = 6$$

abgeleitet werden. Wenn x_n rational, dann ist x_n und folglich $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{v}^*$ und $\mathfrak{w}$ ganzzahlig, also nach (66) $x_n = 0$. Man erhält somit die Lösungsvektoren

(68) $$\pm\zeta\mathfrak{e}_i, \quad i < n \quad \text{für} \quad \zeta^2 = 2\varepsilon_0.$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 8. *Für $a \equiv 2, 3\,(4)$ setzt sich L aus folgenden Vektoren zusammen:*

1. $\varepsilon = 1$, $n = 2$, $a = 3$:	(58)+(59)+(60)+(61)	$\sim D^*_{(12)}\,(\lambda < 1)$
2. $\varepsilon = 1$, $n = 2$, $a > 3$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$:	(59)+(61)	$\sim D^*_{(4)}\ (\lambda < 1)$
3. $\varepsilon = 1$, $n = 4$, $a = 2$:	(56)+(57)+(59)	$\sim F^*_4\ (\lambda = \sqrt{2})$
4. $\varepsilon = 1$, $n = 4$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$:	(59)+(61)+(62)	$\sim F^*_4\ (\lambda < \sqrt{2})$
5. $\varepsilon = 1$, $n > 4$, $a = 2$:	(57)+(59)	$\sim C^*_n\ (\lambda = \sqrt{2})$
6. $\varepsilon = 1$, $n > 4$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$:	(59)+(61)	$\sim C^*_n\ (\lambda \neq \sqrt{2})$
7. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 2$, $a = 6$:	(63)+(64)+(67)+(68)	$\sim D^*_{(6)}\ (\lambda < 1)$
8. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 2$, $a > 6$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$:	(64)+(68)	$\sim D^*_{(3)}\ (\lambda < 1)$
9. $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n > 2$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$:	(64)+(65)+(68)	$\sim C^*_{n-1} + A^*_1\,(\lambda \neq \sqrt{2})$
10. $\varepsilon = 1$ *in allen übrigen Fällen*:	(59)	$\sim B^*_n$
11. $\varepsilon = \varepsilon_0$ „ „ „ „ :	(65)	$\sim B^*_{n-1}$

(*dabei ist B^*_1 leer, $B^*_3 \sim D^*_{(3)}\,(\lambda = 1)$, $B^*_5 \sim A^*_3$*).

Die Zahl 2 wird durch die Form Ω entsprechend den elf Fällen 12, 4, 48, 24, $2n^2$, $2n(n-1)$, 6, 2, $2(n-1)(n-2)+2$, $2n(n-1)$, $2(n-1)(n-2)$ *mal und die Zahl $2\varepsilon_0$ entsprechend* 12, 4, 0, 24, 0, $2n$, 6, 2, $2(n-1)$, 0, 0 *mal dargestellt.*

§ 4.

Berechnung der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ für N.

Unter einer Transformation soll stets eine orthogonale Transformation verstanden werden. Reduziert man alle Vektoren in L auf gleiche Länge, so gehe das Vektordiagramm L in $\overline{L}$ über. Es bedeute

(69)
$\mathfrak{S}$ die Spiegelungsgruppe von L,
$\mathfrak{G}$ die Gruppe aller Transformationen von N in sich,
$\mathfrak{H}$ „ „ „ „ „ L „ „ ;
$\overline{\mathfrak{H}}$ „ „ „ „ „ $\overline{L}$ „ „ .

Offenbar ist

(70) $$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G} \subset \mathfrak{H} \subset \overline{\mathfrak{H}}.$$

Mit L^* bezeichnen wir irgend eines der Wittschen Vektordiagramme $A_n^*, B_n^*, \ldots$. Das Diagramm $\overline{L}^*$ entstehe aus L^*, wenn man in L^* alle Vektoren auf gleiche Länge reduziert. Analog zu (69) sei

(71)
$\mathfrak{S}^*$ die Spiegelungsgruppe von L^*,
$\mathfrak{H}^*$ die Gruppe aller Transformationen von L^* in sich,
$\overline{\mathfrak{H}}^*$ „ „ „ „ „ $\overline{L}^*$ „ „ .

Wenn L und L^* ähnlich sind, dann sind die Gruppen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ bzw. $\overline{\mathfrak{H}}$ zu $\mathfrak{S}^*$, $\mathfrak{H}^*$ bzw. $\overline{\mathfrak{H}}^*$ isomorph. Nach Witt[5]) ist

(72) $$(\overline{\mathfrak{H}}^* : \mathfrak{S}^*) = \begin{cases} 1 & \text{für } L^* = A_1^*,\ C_n^*(n \neq 2),\ E_8^*,\ G_4^*, \\ 2 & \text{„ } L^* = A_n^*(n > 1),\ B_n^*(n \neq 4),\ D_{(m)}^*,\ E_6^*,\ F_4^*, \\ 6 & \text{„ } L^* = B_4^*. \end{cases}$$

Die Ordnungen der im Verlauf dieses Paragraphen auftretenden Spiegelungsgruppen $\mathfrak{S}^*$ haben nach Witt[5]) Satz 10 folgende Werte:

(73)

L^*	A_n^*	B_n^*	C_n^*	$D_{(m)}^*$	E_6^*	E_8^*	F_4^*	G_4^*
$(\mathfrak{S}^* : 1)$	$(n+1)!$	$2^{n-1} n!$	$2^n n!$	$2\,m$	$72 \cdot 6!$	$192 \cdot 10!$	$2^7 \cdot 3^2$	$5!^2$

Dabei ist der Wert für $L^* = E_6^*$ bereits korrigiert. Bestimmt man in E_6^* alle zu einem festen Vektor des Diagramms E_6^* orthogonalen Vektoren, so erhält man ein 5-dimensionales irreduzibles Vektordiagramm von 30 Vektoren. Es handelt sich hierbei um A_5^* und nicht, wie Witt angibt, um B_5^*. Die Buchstaben $S, S_1, S_2, \ldots$ mögen orthogonale Transformationen des n-dimensionalen Raumes in sich bezeichnen. D entstehe aus der n-reihigen Einheitsmatrix, wenn man die letzte 1 in der Hauptdiagonale durch $\sqrt{\varepsilon}$ ersetzt. Einer Transformation

(74) $$\tilde{\mathfrak{y}} = S\mathfrak{y}, \quad S \subset \mathfrak{G}$$

entspricht dann vermöge $\mathfrak{y} = D\mathfrak{x}$ eine Abbildung

(75) $$\tilde{\mathfrak{x}} = D^{-1} S D \mathfrak{x}$$

des Lösungsmoduls M des Kongruenzensystems (5).

Um die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, genügt es im wesentlichen, den Index $(\mathfrak{G}:\mathfrak{S})$ zu berechnen. In den Fällen $L \sim C_n^*(n \neq 2)$, E_8^*, G_4^* ist zufolge (70) und (72) sofort $(\mathfrak{G}:\mathfrak{S}) = 1$ zu schließen. Wir diskutieren der Reihe nach die übrigen Fälle.

1. $L \sim A_4^*$. Wir brauchen dann nur Satz 7, 5. Fall zu betrachten. $\mathfrak{S}$ enthält die Spiegelungsgruppe $\mathfrak{S}_1$ zum Diagramm $\pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k$, $i < k < 4$ ($\sim A_3^*$). Die Transformation S, definiert durch

$$S\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1, \quad S\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2, \quad S\mathfrak{e}_3 = -\mathfrak{e}_3, \quad S\mathfrak{e}_4 = -\mathfrak{e}_4,$$

ist nicht in $\mathfrak{S}_1$ enthalten, aber mit $\mathfrak{S}_1$ vertauschbar. Da $(\mathfrak{S}:\mathfrak{S}_1) = 5$, so liegt S auch nicht in $\mathfrak{S}$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S = \mathfrak{G}$; denn $D^{-1}SD = S$ führt (5) in sich über.

2. $L \sim B_n^*(n \neq 4)$. Es ist dann stets $L = B_n^*$. Die Transformation

$$S\mathfrak{e}_1 = -\mathfrak{e}_1, \quad S\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad i > 1$$

führt zwar L in sich über, liegt aber nicht in $\mathfrak{S}$, so daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S$. $D^{-1}SD = S$ führt (5) in sich über, wenn $a \equiv 2, 3\,(4)$, für $a \equiv 5\,(8)$ dagegen nicht, so daß

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \mathfrak{S} & \text{für} \quad a \equiv 5\,(8), \\ \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S & \text{„} \quad a \equiv 2, 3\,(4). \end{cases}$$

3. $L \sim B_{n-1}^*(n > 2)$. Auch hier ist $L = B_{n-1}^*$. Eine Transformation aus $\mathfrak{H}$ permutiert notwendig die Vektoren $\pm \mathfrak{e}_n$ unter sich, da der zu L orthogonale lineare Raum aus den Vielfachen von $\mathfrak{e}_n$ besteht. $\mathfrak{S}$ hat in der Gruppe der Transformationen von L in sich, welche $\mathfrak{e}_n$ festlassen, den Index 2. Definieren wir S_1 und S_2 durch

$$S_1\mathfrak{e}_1 = -\mathfrak{e}_1, \quad S_1\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad i > 1.$$
$$S_2\mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_k, \quad S_2\mathfrak{e}_n = -\mathfrak{e}_n \quad k < n.$$

so ist leicht zu sehen, daß

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S_1 + \mathfrak{S}S_2 + \mathfrak{S}S_1S_2.$$

Das System (5) ist bezüglich $D^{-1}S_iD = S_i (i = 1, 2)$ invariant, wenn $a \equiv 2, 3\,(4)$, aber nicht für $a \equiv 5\,(8)$. Damit erhält man

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \mathfrak{S} & \text{für} \quad a \equiv 5\,(8), \\ \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S_1 + \mathfrak{S}S_2 + \mathfrak{S}S_1S_2 & \text{„} \quad a \equiv 2, 3\,(4). \end{cases}$$

4. $L \sim B_4^*$. Dann ist $L = B_4^*$ und $\varepsilon = 1$. Es sei

$$S_1\mathfrak{e}_1 = -\mathfrak{e}_1, \quad S_1\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad i > 1$$

und S_3 die Spiegelung an der Normalebene zu $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e})$:

$$S_3\mathfrak{e}_i = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{e}_i - \sum_{k \neq i} \mathfrak{e}_k).$$

Beide Transformationen führen L in sich über. Mit Hilfe der Matrizendarstellungen für S_i errechnet man die Relationen

$$S_3 = S_1 S_2, \quad S_1^2 = S_2^2 = E, \quad S_1 S_3 = S_3^2 S_1.$$

Ein Potenzprodukt $S_1^\mu S_3^\nu$ liegt also nur dann in $\mathfrak{S}$, wenn $\mu \equiv 0\,(2)$, $\nu \equiv 0\,(3)$, so daß

$$\mathfrak{H} = \sum_{\mu,\nu} \mathfrak{S} S_1^\mu S_3^\nu \quad (\mu = 0, 1; \quad \nu = 0, 1, 2).$$

Die Transformation S_3 vermittelt die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ \tilde{x}_2 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \\ \tilde{x}_3 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ \tilde{x}_4 &= \tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4). \end{aligned}$$

Aus dieser expliziten Darstellung folgt nach kurzer Rechnung die Invarianz von (5) bezüglich S_3. S_1 läßt (5) nur invariant für $a \equiv 2, 3\,(4)$, dagegen nicht für $a \equiv 5\,(8)$. Man erhält daher folgendes Resultat:

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \mathfrak{S} + \mathfrak{S} S_3 + \mathfrak{S} S_3^2 & \text{für} \quad a \equiv 5\,(8), \\ \mathfrak{S} + \mathfrak{S} S_3 + \mathfrak{S} S_3^2 + \mathfrak{S} S_1 + \mathfrak{S} S_1 S_3 + \mathfrak{S} S_1 S_3^2 & \text{„} \quad a \equiv 2, 3\,(4). \end{cases}$$

5. $L \sim D^*_{(m)}$ $(\lambda < 1)$. Da L Vektoren verschiedener Länge enthält, ist offenbar $(\bar{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H}) = 2$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}$.

6. $L \sim E^*_6$. Es handelt sich um Satz 7, 6. Fall. Ähnlich wie im Fall $L \sim A^*_6$ schließt man, daß die Transformation S, definiert durch

$$S\mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_i \quad \text{für} \quad i < 5, \quad S\mathfrak{e}_5 = -\mathfrak{e}_5, \quad S\mathfrak{e}_6 = -\mathfrak{e}_6,$$

mit der Spiegelungsgruppe $\mathfrak{S}_1$ zum Diagramm $\pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k$, $i < k < 6$ $(\sim B^*_5)$ vertauschbar ist und weder in $\mathfrak{S}_1$ noch in $\mathfrak{S}$ enthalten ist; denn es ist $(\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_1) = 3^3$. S läßt das System (5) invariant, so daß

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S} S.$$

7. $L \sim F^*_4$. Das Diagramm $\bar{L}$ setzt sich aus den beiden Systemen

(76) $$\pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k \,(i < k)$$

und

(77) $$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm \mathfrak{e}_1 \pm \mathfrak{e}_2 \pm \mathfrak{e}_3 \pm \mathfrak{e}_4), \quad \pm \sqrt{2}\,\mathfrak{e}_i$$

zusammen. Diese werden durch die Transformation S, definiert durch

$$\begin{aligned} S\mathfrak{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_2), \quad S\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_4), \\ S\mathfrak{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2), \quad S\mathfrak{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_4) \end{aligned}$$

miteinander vertauscht. Da die Matrizen der Transformationen aus $\mathfrak{S}$ rationale Koeffizienten haben, so liegt S nicht in $\mathfrak{S}$, sodaß $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S} S$. Wenn L Vektoren verschiedener Länge enthält, dann wird das System (76) durch die Transformationen aus $\mathfrak{H}$ in sich übergeführt. Es kann also S nicht in $\mathfrak{H}$ liegen und muß $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}$ gelten. Enthält L nur

Vektoren der Länge $\sqrt{2}$, so ist $a = 2$ und die Transformation S läßt (5) invariant, mithin ist jetzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}S$.

8. $L \sim C_{n-1}^* + A_1^* (n > 2)$. L setzt sich zusammen aus den beiden orthogonalen Diagrammen C_{n-1}^* und $\pm\sqrt{2}\,\mathfrak{e}_n$, welche durch eine beliebige Transformation aus $\overline{\mathfrak{H}}$ in sich übergeführt werden. Da die Spiegelungsgruppe von L gleich dem direkten Produkt der Spiegelungsgruppen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zu C_{n-1}^* bzw. $\pm\sqrt{2}\,\mathfrak{e}_n$, so ist also $\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$.

9. L ist leer. Dann ist $n = 2$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$. Es sei

$$S = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \\ \sqrt{\varepsilon_0}\,\beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sigma\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (\sigma = \pm 1)$$

eine Transformation aus $\mathfrak{G}$. Sie vermittelt die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2, \\ \tilde{x}_2 &= \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 \end{aligned} \tag{78}$$

des Lösungsmoduls M des Systems (5) in sich, woraus man ersieht, daß die Koeffizienten β_{ik} Körperzahlen mit der Eigenschaft $\beta_{ik} \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-1})$ sind. Für die β_{ik} bestehen die Beziehungen

$$\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 \varepsilon_0 = 1, \quad \beta_{21} = \pm\beta_{12}\varepsilon_0', \quad \beta_{22} = \pm\beta_{11}.$$
$$|\beta_{11}| \leqq 1, \quad |\beta_{11}'| \leqq 1.$$

Den Ungleichungen zufolge muß β_{11} rational sein; denn der Nenner von β_{11} ist beschränkt, und für $a \equiv 5\,(8)$ ist von vornherein $a > 64$ anzusetzen. Wir betrachten zunächst den Fall $a \equiv 2, 3\,(4)$. $\beta_{11} = \pm 1$ liefert die Vierergruppe, erzeugt von

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Für $\beta_{11} = \pm\frac{1}{2}$ ist $(2\beta_{12})^2 = 3\varepsilon_0$, d. h. $3/a$ und das Primideal, welches 3 teilt, ist Hauptideal. Wir bezeichnen mit ξ eine Erzeugende dieses Ideals, sodaß $\xi^2 = 3\varepsilon_0$. Offenbar ist $\alpha_1 = \xi$ zu wählen. Man erhält die acht zulässigen Transformationen

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{2} & \frac{\sigma_2}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{\sigma_3}{2}\sqrt{3} & \frac{\sigma_4}{2} \end{pmatrix}, \quad \prod_{i=1}^{4} \sigma_i = 1. \tag{80}$$

Die zugehörigen Abbildungen (78) führen das System (5) in sich über, was eine einfache Rechnung erkennen läßt. S_3 sei die spezielle Transformation, die man für $\sigma_i = 1$ erhält. S_1 und S_3 erzeugen $\mathfrak{G}$, wenn $\xi^2 = 3\varepsilon_0$. Es bestehen die Relationen

$$S_1^2 = S_3^6 = (S_1 S_3)^2 = E.$$

Für $a \equiv 5\,(8)$ und $\beta_{11} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ wird man auf dieselben Transformationen geführt. $\beta_{11} = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$ liefert nur noch Transformationen. welche (5) nicht invariant lassen. S_1 und S_2 lassen (5) nicht invariant, wohl aber $S_1 \cdot S_2$ und S_3. Es ergibt sich damit folgendes Resultat

$$(81) \qquad \mathfrak{G} = \begin{cases} \{S_3\} & \text{für } a \equiv 5\,(8), & \zeta^2 = 3\varepsilon_0, \\ \{S_1 \cdot S_2\} & \text{„ } a \equiv 5\,(8) & \text{sonst}, \\ \{S_1, S_3\} & \text{„ } a \equiv 2, 3\,(4), & \zeta^2 = 3\varepsilon_0, \\ \{S_1, S_3\} & \text{„ } a \equiv 2, 3\,(4) & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die mit Hilfe der Tabelle (73) zu bestimmenden Ordnungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ stellen wir zur Übersicht zusammen.

Satz 9. *Die Ordnung der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von N hat in Abhängigkeit von L folgenden Wert:*

$L \sim$	$(\mathfrak{G}:1)$		$L \sim$	$(\mathfrak{G}:1)$	
A_4^*	$2 \cdot 5!$		E_8^*	$192 \cdot 10!$	
B_4^*	$4!^2$	für $a \equiv 5\,(8)$	$F_4^*(\lambda < \sqrt{2})$	$2 \cdot 4!$	
	$2 \cdot 4!^2$	„ $a \equiv 2,3\,(4)$	$F_4^*(\lambda = \sqrt{2})$	$4 \cdot 4!$	
$B_{n-1}^*\,(n>2)$	$2^{n-2}(n-1)!$	„ $a \equiv 5\,(8)$	G_4^*	$5!^2$	
	$2^n(n-1)!$	„ $a \equiv 2,3\,(4)$	$C_{n-1}^* + A_1^*\,(n>2)$	$2^n(n-1)!$	
$B_n^*\,(n \neq 4)$	$2^{n-1}n!$	„ $a \equiv 5\,(8)$	*leer*	6 *für* $a \equiv 5\,(8)$,	$\zeta^2 = 3\varepsilon_0$
	$2^n n!$	„ $a \equiv 2,3\,(4)$		2 „ $a \equiv 5\,(8)$	*sonst*
$C_n^*\,(n>2)$	$2^n n!$			12 „ $a \equiv 2,3\,(4)$,	$\zeta^2 = 3\varepsilon_0$
$D_{(m)}^*\,(\lambda<1)$	$2m$			4 „ $a \equiv 2,3\,(4)$	*sont.*
E_6^*	$12^2 \cdot 6!$				

§ 5.

Betrachtungen zur Äquivalenz quadratischer Formen.

Die vorangehenden Untersuchungen der Eigenschaften von $\mathfrak{Q}$ sind so ausführlich dargestellt, daß die analogen Aussagen für die durch das System (15) definierte quadratische Form $\mathfrak{Q}^*$, die nach demselben Verfahren zu ermitteln sind, ohne Beweis mitgeteilt werden können. Dabei unterliegt der quadratische Körper $R(\sqrt{a})$ keinen Einschränkungen. Mit M^* bezeichnen wir den I-Modul der Lösungsvektoren $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ des Systems (15). L^* sei das Vektordiagramm in M^*, das alle Vektoren aus M^* der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2\varepsilon_0}$ ($\varepsilon_0 > 0$ voraussgesetzt) enthält; L^* besteht aus folgenden Vektoren:

$$(82) \qquad \pm \mathfrak{e}_i \pm \mathfrak{e}_k \quad (i<k), \qquad \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} \sigma_i \mathfrak{e}_i\right), \quad \prod_{i=1}^{8} \sigma_i = 1, \text{ zusätzlich für } n = 8.$$

Daraus ist zu entnehmen, daß $2\varepsilon_0$ durch $\mathfrak{Q}^*$ nicht dargestellt wird. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{G}^*$ von M^* ist mit der Spiegelungsgruppe zum Diagramm L^* identisch, sodaß auf Grund der Angaben des vorigen Paragraphen

$$(\mathfrak{G}^* : 1) = \begin{cases} 192 \cdot 10! & \text{für } n = 8, \\ 2^{n-1} n! & \text{„ } n > 8. \end{cases}$$

Für $a \equiv 2, 3\,(4)$, $n \equiv 0\,(8)$, $\varepsilon = 1$ zeigt nun die eingangs beschriebene Schlußweise, daß die Formen $\mathfrak{Q}$, $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}^*$, $\varepsilon_0\mathfrak{Q}^*$ verschiedene Klassen repräsentieren; denn nach Satz (8) stellt $\mathfrak{Q}$ die Zahlen 2 und $2\varepsilon_0$ nicht gleich oft dar und nach Satz 9 ist $(\mathfrak{G} : 1) \neq (\mathfrak{G}^* : 1)$.

Wir können nun auch allgemein die Frage beantworten, wann $\mathfrak{Q}$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ in derselben Klasse liegen. Notwendig dafür ist, daß die Zahlen 2 und $2\varepsilon_0$ durch $\mathfrak{Q}$ gleich oft dargestellt werden. Den Sätzen 7 und 8 entnehmen wir, daß dies nur in den drei unter (14) aufgeführten Fällen zutrifft. Für diese beweisen wir die Äquivalenz von $\mathfrak{Q}$ und $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$.

1. $n = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Mit $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2\}$ ist auch $\mathfrak{x}^* = \{-x_2, x_1\varepsilon_0'\}$ ein Lösungsvektor von (5). Die zugeordneten nach der Vorschrift (9) zu berechnenden Vektoren in N lauten $\mathfrak{y} = \{x_1, x_2\sqrt{\varepsilon_0}\}$ und $\mathfrak{y}^* = \sqrt{\varepsilon_0'}\{-x_2\sqrt{\varepsilon_0}, x_1\}$. Wir wählen eine beliebige Basis $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ in N; das zugeordnete Vektorpaar $\mathfrak{y}_1^*, \mathfrak{y}_2^*$ stellt ebenfalls eine Basis von N dar. Es ist dann

$$(\mathfrak{y}_i \mathfrak{y}_k) = \varepsilon_0 (\mathfrak{y}_i^* \mathfrak{y}_k^*) \sim \varepsilon_0 (\mathfrak{y}_i \mathfrak{y}_n)\ ^6), \quad \text{q. e. d.}$$

2. $n = 2$, $\varepsilon = 1$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$. Dann ist $a \equiv 3\,(4)$ und etwa $\alpha = \sqrt{a}$. Die Vektorpaare

$$\{1, -1\},\ \left\{\frac{1+\sqrt{a}}{2}, \frac{1-\sqrt{a}}{2}\right\} \text{ und } \{\zeta, 0\},\ \left\{\frac{\sqrt{a}}{\zeta}, \frac{1}{\zeta}\right\}$$

stellen Basen von N dar. Die mit diesen Basen gebildeten quadratischen Formen sind äquivalent. Das hat zur Folge

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \zeta^2 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & \frac{a+1}{\zeta^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \zeta^2 & \sqrt{a}\,\varepsilon_0 \\ \sqrt{a}\,\varepsilon_0 & \frac{a+1}{\zeta^2}\varepsilon_0^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & \frac{a+1}{2} \end{pmatrix},$$

q. e. d.

3. $n = 4$, $\varepsilon = 1$, $\zeta^2 = 2\varepsilon_0$. Die Zeilen der Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ \frac{1}{\zeta} & \frac{1}{\zeta} & \frac{1}{\zeta} & \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}$$

[6]) Für zwei symmetrische Matrizen A und B möge $A \sim B$ bedeuten, daß die mit den Koeffizienten von A und B gebildeten quadratischen Formen äquivalent sind.

bilden ein System von Basisvektoren für N. Zu der mit dem Koeffizientenschema $A'A$ gebildeten quadratischen Form $\mathfrak{Q}$ findet man $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ als äquivalente Form wie folgt:

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \zeta & 0 \\ 0 & \zeta & \zeta^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{\zeta^2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{4}{\zeta^2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta & 0 \\ 0 & \zeta & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \frac{4}{\zeta^2}\varepsilon_0^2 & \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_0 & \zeta^2 & \zeta\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \zeta\varepsilon_0 & 2\varepsilon_0^2 & \varepsilon_0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & 2 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 A'A.$$

Damit ist bewiesen

Satz 10. *Notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der quadratischen Formen* $\mathfrak{Q}$ *und* $\varepsilon_0\mathfrak{Q}$ *ist die Bedingung* (14).

Zum Schluß soll gezeigt werden, daß im Körper $R(\sqrt{33})$ mit der Grundeinheit $\varepsilon_0 = 23+4\sqrt{33}$ eine positive gerade Form von 2 Variablen mit der Determinante ε_0 nicht durch Kongruenzen definiert werden kann, wie es sich oben für die Körper $R(\sqrt{a})$ mit $a \not\equiv 1\,(8)$ als möglich erwiesen hat, wenn die Bedingung (4) für $\varepsilon = \varepsilon_0$ erfüllt ist. Sei

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

das Koeffizientenschema einer solchen Form, also

$$A \equiv C \equiv 0\,(2), \quad AC - B^2 = \varepsilon_0,$$

und

$$A = \alpha^2 + \varepsilon_0\beta^2, \quad B = \alpha\gamma + \varepsilon_0\beta\delta, \quad C = \gamma^2 + \varepsilon_0\delta^2$$

aus einer hypothetischen Darstellung der Form durch Kongruenzen nach einem beliebigen Modul gewonnen. Dann ist ein Widerspruch aufzudecken. Da $B^2 \equiv 1\,(4)$, so gilt auch $B^2 \equiv 1\,(8)$, also $AC \equiv \varepsilon_0 + 1 \equiv 4\,(8)$. $\frac{1}{2}A$ ist demnach teilerfremd zu 2. Die Primzahl 2 zerfällt vollständig in $K = R(\sqrt{33}) : (2) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$. Dagegen bleiben die Primideale $\mathfrak{p}_i$ im Körper $Z = K(\sqrt{-\varepsilon_0})$ unzerlegt. Z enthält nämlich den quadratischen Körper $R(\sqrt{-3})$, in welchem die Primzahl 2 unzerlegt bleibt. Die Zahl A erscheint als Relativnorm $\mathfrak{N}_{Z/K}(\alpha + \sqrt{-\varepsilon_0}\,\beta)$ und müßte daher als gerade Zahl mindestens durch 4 teilbar sein, was nicht der Fall ist.

(Eingegangen am 25. August 1944.)